数学分支的思想方法丛书

明清河 主编

微积分的思想方法溯源

◎ 杨艳萍 杨耕文 著

山东大学出版社

WEIJIFEN DE
SIXIANGFANGFA SUYUAN

责任编辑　刘旭东
美术编辑　张　荔



数学分支的思想方法丛书

明清河　主编

微积分的思想方法溯源

杨艳萍　杨耕文　**著**

山 东 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

微积分的思想方法溯源/杨艳萍,杨耕文著. —济南：山东大学出版社,2010.5
(数学分支的思想方法丛书/明清河主编)
ISBN 978-7-5607-4093-5

Ⅰ.①微…
Ⅱ.①杨…②杨
Ⅲ.①微积分—研究
Ⅳ.①0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 108644 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
济南景升印业有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　5.25 印张　131 千字
2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
定价：12.00 元

内容提要

本书在数学方法论与数学哲学的视野下，对微积分中的重要概念、重要理论、重要方法的产生、发展与应用进行探讨，内容主要包括无理数、数学符号、微积分计算、函数、极限、级数与求和、微积分中的重要概念、微积分中的重要常数、微积分中的特殊积分等。

总　序

数学科学是在历史上逐渐形成和发展起来的一种知识系统。这个知识系统是由一个个分支组成的，同时各个分支间又相互联系、相互交叉、相互作用，从而产生新的分支，促进数学的发展与壮大。

数学的每一个分支，在确立之前都有一个萌发、孕育的过程，总结和分析它们的系统发育过程、了解其思想方法的演变规律，对了解数学的发现与创新，有着重要的引导作用。当一个数学分支形成独立的体系后，其内容体系中又包含着该分支所特有的核心思想与常用方法。任何一个数学分支都是由具体的数学知识和蕴涵的思想方法构筑起来的，数学知识是它的“躯体”，思想方法则是它的“灵魂”。思想方法寓于数学知识之中，是获取知识和发展思维的动力工具。

如果将数学的教与学仅仅看成是数学知识的传授与学习，将难以发挥数学的真正作用；领会和掌握数学的思想方法和精神实质，才能真正发挥数学在现实社会中的积极作用，才能充分显示数学的无穷威力与魅力，这应该是数学教育所努力追求的目标。

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则的一门学问。对数学分支思想方法的研究，是数学方法论研究的一个新领域和具体方向。

关于数学分支思想方法的研究，既可以对数学分支的发现、发展、创立过程中新观念、新思想、新方法、新见解及其演变规律进行研究，又可以对数学分支内容体系中蕴含的数学思想和方法进行研究。其主要研究内容主要包括：数学分支的起源与发展，数学分支的本质和特征，数学分支与现实世界的关系，数学分支的文化地位，数学分支的认识论与方法论价值，数学分支内部间的辩证关系与美学研究，数学分支形成过程与内容体系中的核心思想，数学分支各特定内容中的数学思想与常用方法等。其主要研究方式主要有：将数学哲学、数学史、数学教育相结合，将数学思想、数学知识、数学方法相结合。

《数学分支的思想方法丛书》是作者在数学方法论指导下，结合数学教学和科学研究的实践，经过长时间探讨的辛勤劳动成果，是数学方法论研究的新领域、新成果。本丛书主要从数学史、数学方法、数学哲学、数学教学、数学学习究、数学美学等视角，对数学分支的思想方法进行研究。将数学分支的本质、内容、思想、方法以及发展历史有机地融会在一起。其显著特点是系统性、深刻性与思辨性，同时集知识性、思想性、故事性、史料性于一体。是提高科学文化素质和增长知识的理想读本，可作为大学数学专业的教材，亦可作为数学史研究的参考书目。并且对从事数学史、数学哲学、数学方法论的研究人员来说也有很好的参考价值。

希望本丛书的出版能对数学方法论研究领域的扩展和应用起到应用的推动作用。

王梓坤

（中国科学院院士、原北京师范大学校长）

目 录

第一章　无理数的发现

微积分的研究对象是定义在“实数集”上的函数，实数包含有理数和无理数．有理数可表示成$\frac{p}{q}$（p,q为整数，$q\neq0$）的形式，有理数的这种表示形式以及不能用该形式表示的第一个数（无理数$\sqrt{2}$）的发现都归功于毕达哥拉斯学派．

本部分主要介绍毕达哥拉斯及其学派、希帕索斯发现无理数、无理数的证明．

一、毕达哥拉斯及其学派

公元前6世纪到公元前5世纪在意大利半岛南部希腊城郊活跃着一个著名学派，这是一个由三百名贵族青年组成的进行数学研究和宗教修养的秘密社团．创始人是著名的古希腊哲学家、数学家、天文学家毕达哥拉斯，该学派就是被称为古希腊四大数学学派之一的毕达哥拉斯学派．

毕达哥拉斯（Pythagoras）生于公元前580年至公元前500年，他从小就很聪明，一次他背着柴禾从街上走过，一位长者见他捆柴的方法与别人不同，便说：“这孩子有数学奇才，将来会成为一个大

学者."他闻听此言,便摔掉柴禾回家,准备行囊,南渡地中海到泰勒斯门下去求学了.



毕达哥拉斯本来就极聪明,经泰勒斯一指点,许多数学难题在他的手下便迎刃而解.其中,他证明了三角形的内角和等于 180°;证明了若要用瓷砖铺地,则只有用正三角、正四角、正六角三种正多角砖才能刚好将地铺满,还证明了世界上只有五种正多面体,即:正 4、6、8、12、20 面体.他还发现了奇数、偶数、素数、合数、完全数、亲和数、三角数、五角数、平方数等.

毕达哥拉斯最伟大的成就是发现了后来以他的名字命名的毕达哥拉斯定理(勾股定理),即:以直角三角形两直角边为边长的正方形的面积之和等于以斜边为边长的正方形的面积.据说,这是当时毕达哥拉斯在寺庙里见工匠们用方砖铺地,经常要计算面积,于是便发明了此法.

最早把数的概念提到突出地位的也是毕达哥拉斯,在这之前的哲学家用火、气、水、土四种元素,解释世间万事万物,而毕达哥拉斯学派认为:宇宙间一切事物都可归结为整数或整数之比——"万物皆数",认为数是宇宙的本源,数的元素就是万物的元素,世界是由数组成的,世界上的一切没有不可以用数来表示的,数本身就是世界的秩序.毕达哥拉斯学派把数学建立成了一门理性的学科.

二、希帕索斯发现无理数

据说有一天,毕达哥拉斯学派的成员们刚开完一个学术讨论会,正坐着游船出来领略山水风光,以驱散一天的疲劳.

这天,风和日丽,海风轻轻地吹,荡起层层波浪,大家心里很高兴.一个满脸胡子的学者看着辽阔的海面兴奋地说:“毕达哥拉斯先生的理论一点都不错.你们看这海浪一层一层,波峰浪谷,就好像奇数、偶数相间一样,世界就是数字的秩序.”

“是的,是的.”这时一个正在摇桨的大个子插进来说:“就说这小船和大海吧.用小船去量海水,肯定能得出一个精确的数字.一切事物之间都是可以用数字互相表示的.”

“我看不一定.”这时船尾的一个学者突然提问了,“要是量到最后,不是整数呢?”

大个子说:“那就是小数.”

船尾的学者又提问:“要是小数既除不尽,又不能循环呢?”

其他学者几乎异口同声地说:“不可能,世界上的一切东西,都可以相互用数字直接准确地表达出来.”

看到这阵势,船尾的学者以一种不想再争辩的口气冷静地说:“并不是世界上一切事物都可以用我们现在知道的数来互相表示,就以毕达哥拉斯先生研究最多的直角三角形来说吧,假如是等腰直角三角形,你就无法用一个直角边准确地量出斜边来.”

这个提问的学者叫希帕索斯(Hippasus,约公元前 400 年),他在毕达哥拉斯学派中是一个聪明、好学、有独立思考能力的青年数学家.今天要不是因为争论,还不想发表自己这个新见解呢.

摇桨的大个子一听这话就停下手来大叫着:“不可能,先生的理论置之四海皆准.”

希帕索斯眨了眨聪明的大眼,伸出两手,用两个虎口比成一个等腰直角三角形说:“如果直边是 3,斜边是几?”“4.”“再准确些?”“4.2.”“再准确些?”“4.24.”“再准确些呢?”一连串的提问让大个子的脸涨得绯红,一时答不上来.

希帕索斯说:“你就再往后数上 10 位、20 位也不能算是最精确的.我演算了很多次,任何等腰直角三角形的斜边,都不能用一个

精确的数字表示出来."

这话像一声晴天霹雳,全船立即响起一阵怒吼:"你敢违背毕达哥拉斯先生的理论,敢破坏我们学派的信条!敢不相信数字就是世界!"

希帕索斯这时十分冷静,他说:"我这是个新的发现,就是毕达哥拉斯先生在世也会奖赏我的.你们可以随时去验证."

可是人们不听他的解释,愤怒地喊着:"叛逆!先生的不肖门徒.""打死他!批死他!"大个子冲上来,当胸给了他一拳.希帕索斯抗议着:"你们无视科学,你们竟这样无理!"大个子恶狠狠地说:"捍卫学派的信条永远有理."

实际上,希帕索斯在研究 1 和 2 的比例中项时(若 $1:x=x:2$,那么 x 叫 1 和 2 的比例中项),怎么也想不出这个比例中项值.后来,他画一边长为 1 的正方形,设对角线为 x,于是 $x^2=1^2+1^2=2$.他想,x 代表对角线长,而 $x^2=2$,那么 x 必定是确定的数.但它是整数还是分数呢?显然,2 是 1^2 和 2^2 之间的数,因而 x 应是 1 和 2 之间的数,因而不是整数.那么 x 会不会是分数呢?他用归谬法证明了这个数也不是分数.



希帕索斯发现的这个惊人的事实:"一个边长为 1 的正方形的对角线与其一边的长度是不可公度的(不可通约的)",与毕达哥拉斯学派"万物皆数"(指有理数)的哲理大相径庭.对毕达哥拉斯学派是一次致命的打击,导致了当时认识上的"危机"——第一次数学危机.这一发现使该学派领导人惶恐、恼怒,认为这将动摇学派在学术界的统治地位.他们费了很大的精力,将此事保密,不准外传,希帕索

斯被囚禁，受到百般折磨，最后竟遭到沉舟身亡的惩处.

不可通约的本质是什么？长期以来众说纷坛，得不到正确的解释，两个不可通约的比值也一直被认为是不可理喻的数. 15 世纪意大利著名画家达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452 ~ 1519) 称之为“无理的数”，17 世纪德国天文学家开普勒(Johannes Kepler, 1571 ~ 1630) 称之为“不可名状”的数.

由无理数引发的数学危机一直延续到 19 世纪. 1872 年，德国数学家戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 ~ 1916) 从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数，并把实数理论建立在严格的科学基础上，从而结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续 2000 多年的数学史上的第一次大危机.

数学的发展史告诉人们，真理是淹没不了的，毕达哥拉斯学派抹杀真理才是“无理”. 人们为了纪念希帕索斯这位为真理而献身的可敬学者，就把不可通约的量取名为“无理数”—— 这便是“无理数”的由来.

三、无理数的证明

证明某个数是无理数，一般采用反证法. 如下面三例：

例 1-1　设 P 为正整数，证明：若 P 不是完全平方数，则$\sqrt{P}$是无理数.

证：假设$\sqrt{P}$为有理数，则存在正整数 m,n，使$\sqrt{P}=\frac{m}{n}$，且 m 与 n 互素，从而它们的最大公约数为 1，由辗转相除法知：

存在整数 u,v，使 $mu+nv=1$，从而 $m^2u+mnv=m$，

于是 n 可整除 m，这样 $n=1$，因此 $P=m^2$，这与 P 不是完全平方数相矛盾，

故$\sqrt{P}$为无理数.

例 1-2　证明$\sqrt{2}$是无理数.

证:假设$\sqrt{2}$是有理数,则存在互质的正整数p,q使$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$,从而$\frac{p^2}{q^2}=2$,于是得$p^2=2q^2$,这说明p^2是偶数,因此p必为偶数.

设$p=2k$(k为自然数),则有$p^2=4k^2=2q^2$,即$2k^2=q^2$,这说明q^2是偶数,因此q必为偶数,于是p、q都是偶数,这与p、q互质矛盾.

故$\sqrt{2}$是无理数.

例 1-3 证明 lg2 是无理数.

证:假设lg2 是有理数,则存在互质的正整数m,n使$\lg 2=\frac{m}{n}$,从而$10^{\frac{m}{n}}=2$,进而$10^m=2^n$,即$2^m\cdot 5^m=2^n$,此式左边可被 5 整除,而右边不能,矛盾.

故 lg2 是无理数.

第二章　数学符号的创立

在微积分里，大量使用了特定的数学符号，精确化的符号语言与论证训练是微积分的重要内容之一，能把证明用准确、严密、简练的数学语言和符号书写出来是一项基本要求.

本部分主要介绍数学符号系统的引入、初等数学符号系统、微积分符号系统.

数学符号语言是数学思维的外显形式，它反映了数学思维的特征，简化了数学思维的过程，是数学思维的载体.

数学符号体系出现在16世纪，通行于18世纪，纵观世界数学史，可以看出，数学符号的使用极大地推动了数学的发展. 有人把17世纪叫做数学的天才时期，把18世纪叫做发展时期. 这两个世纪数学之所以取得了较大的成就，原因之一就是大量创造和使用了数学符号.

严整的符号体系，独特的公式语言是数学区别于其他学科的一个重要特征. 它不仅简化和丰富了数学理论的表达方式，尤其重要的是，只有在准确而严整的符号体系下，才能使运算成为可能. 德国数学家克莱因曾说:“如果没有专门的符号和公式，简直就不可能有现代数学.”

数学符号的种类繁多，它包括数字符号、运算符号、关系符号、

性质符号、象形符号等. 到目前为止,数学中常见的符号有两百多种,这些符号有机地结合在一起,构成了内涵深刻、丰富、简明的数学语言,成为“数学王国”里统一规定的文字.

一、数学符号系统的引入

法国数学家韦达(Viete, Francoic 1540 ~ 1603)是第一个把符号引入到数学中的人,16 世纪末韦达在前人积累下来的经验基础上,有意识地、系统地使用字母表示数.

17 世纪,法国数学家笛卡儿(Rene Descartes, 1596 ~ 1650)采用字母 $a,b,\cdots$ 代表已知量,用字母 $x,y,\cdots$ 代表未知量,用 a^2, $b^2,\cdots$ 的形式表示幂,初步建立了代数的符号系统,发展成为今天的习惯写法.

二、初等数学符号系统

1. 四则运算、相等、大于、小于符号

15 世纪德国数学家韦德曼最早使用现代的加号“+”与减号“—”.

1631 年,英国数学家奥特雷德首次以“×”表示两数相乘,德国数学家莱布尼兹于 1698 年提出以圆点“·”表示乘.

1659 年瑞士数学家哈纳引用除号“÷”,莱布尼兹首次以冒号“:”表示除.

1557 年,英国数学家雷科德首次采用现今通用的相等符号“=”,因此也称为雷科德符号,直至 17 世纪末期,以“=”为等号才被人们所接受,并渐得通用.

英国著名的代数学家哈里奥特于 1631 年开始采用现今通用的大于号“>”与小于号“<”.

2. 负数、虚数、方根、绝对值符号

负数是由中国古代(战国时期)的数学家最先所采用及应用

的，在《九章算术》中便记载了负数及负数的运算法则.

而西方对负数的认识则比中国较迟，到 15 世纪后才正式应用负数. 直至 20 世纪初，美国学者享廷顿才开始采用接近现在的负数符号形式，如 $-3,-2,-1,0,+1,+2,+3$，并逐渐成为现在的正负数.

第一个对负数开方运算进行研究并得到虚数及其运算方法的人是 1545 年的意大利学者卡丹诺.

1637 年，在笛卡儿的《几何学》一书中第一次出现了虚数的名称.

1777 年，瑞士的数学家欧拉首次以 i 来表示 $\sqrt{-1}$.

1801 年德国数学家高斯系统地使用这个符号，并沿用至今.

1637 年，笛卡儿采用 $\sqrt{\ }$ 作平方根号、$\sqrt[3]{\ }$ 作立方根号；其后，各次方根号都逐渐以这形式表达，数学家欧拉认为“$\sqrt{\ }$”是由拉丁文 radix(根) 的第一个字母 r 变形而来.

1841 年德国数学家维尔斯特拉斯首先引用“‖”为绝对值符号，沿用至今.

3. 行列式、矩阵、阶乘、和式符号

1812 年，法国数学家柯西首先采用了行列式这个名称，1841 年，英国数学家凯莱在研究行列式问题时，在正方形数的两旁各画了一条竖线，这就是行列式号.

“矩阵”一词是英国数学家西勒维斯特在 1850 年首先使用的. 表示矩阵的符号应归功于两位长期合作的英国数学家凯莱和西勒维斯特，他们对矩阵的理论及其符号的运用，做了很多开创性的工作.

1751 年，欧拉以大写字母 M 表示 m 阶乘，1799 年，意大利数学家鲁非尼在他出版的方程论著述中，则以小写字母 π 表示 m 阶乘，而在 1813 年，高斯则以 $\Pi(n)$ 来表示 n 阶乘. 最先提出用 $n!$ 作为阶

乘符号的人是克拉姆（1808 年），后来经过欧姆等人的提倡而流行，直至现在仍然通用.

用“$\sum$”来表示和式号是欧拉于 1755 年首先使用的，$\sum$ 起源于希腊文 σογμαρω（增加），是单词第一个字母 σ 的大写.

4. 几何、三角、指数、对数符号

最早采用几何符号的是古希腊数学家海伦，公元 150 年海伦采用“Δ”表示三角形.

1633 年埃里冈用“⊥”表示垂直.

1657 年奥特雷德用“∠”表示角，琼斯等人用“//”表示平行.

1679 年莱布尼兹用“～”表示相似，用“≌”表示全等.

1659 年，雷恩是首个以符号“∴”表示“所以”，1805 年，英国出版的《大众数学手册》中首次以“∵”表示“因为”，但直到 1827 年，才日渐流行，且沿用至今.

1626 年德国数学家阿贝尔特 · 格洛德用符号“sin”、“tan”、“sec”表示正弦、正切、正割.

1675 年，英国数学家奥屈特用“cos”、“cot”、“csc”作为余弦、余切、余割号.

1776 年，兰伯特则以 arcsin 表示反正弦函数.

1632 年，笛卡儿系统地采用了正整数指数，以较小的阿拉伯数字放于右上角来表示指数，如 $5a^4$. 1676 年牛顿发展了笛卡儿的工作，最先使用了正指数和负指数，整数指数和分数指数.

对数是由苏格兰数学家纳皮尔 1594 年发明的，1632 年意大利数学家卡瓦列里是首个采用符号 log 的人，“log”源于拉丁文 Logarithm（对数）的前三个字母；1893 年，皮亚诺以“$\ln x$”、“$\lg x$”、“$\log_k x$”分别表示以 e 为底、以 10 为底和以 k 为底的对数.“$\ln N$”中的“l”是 Logarithm（对数）的第一个字母，“n”是 nature（自然）的第一个字母.

三、微积分符号系统

1889 年，意大利数学家皮亚诺首先使用“$\in$”，“$\notin$”，“$\subseteq$”，“$\subset$”来表示属于、不属于、包含于，创立集合符号，后来莱布尼兹创立了交集、并集符号“$\cap$”，“$\cup$”.

1694 年，约翰·伯努利首次提出函数概念，1734 年，欧拉首次以“f”表示函数，1820 年，赫谢尔以 $f(x)$ 表示 x 的函数.

圆周率的符号 π，是由英国数学家琼斯在 1706 年出版的《新数学引论》中首次创立的，后来在瑞士数学家欧拉和德国数学家哥德巴赫等人的积极倡导下被人们接受、采纳、欢迎、确定下来.

首先以 e 表示自然对数的底是欧拉，字母 e 恰好是他的名字“Euler”中的第一个字母，他大约于 1727 年或 1728 年的手稿内采用这符号，但这手稿至 1862 年才付印，而丹尼尔·伯努利、孔多塞及兰伯特则分别于 1760 年、1771 年及 1764 年采用这符号，沿用至今.

极限符号“lim”是由法国数学家柯西引入的，源于拉丁文 Limit(极限)的前三个字母.

维尔斯特拉斯提出了数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义和函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，这样的符号体系至今仍在微积分书籍中使用.

1655 年英国数学家沃利斯著《无穷算术》，导入无穷级数与无穷乘积，首创无穷大符号 ∞.

在函数 f 或者 y 的上方加一个“$'$”的方法来表示导数，即用 y'，f' 来表示导数是法国数学家拉格朗日创用的，又称为拉格朗日记号.

微分符号 $\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}f$，微商符号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是数学家莱布尼兹首先创用的，又称为莱布尼兹记号，符号的巧妙之处在于清楚地指出了这是对变量 x 的导数. 当讨论一个函数对不同的变量求导时，就显示了

这种符号的优越性.

不定积分符号$\int$也是莱布尼兹创用的,$\int$是“Summa”(和)第一个字母“S”拉长以后的写法.

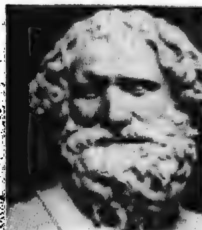
1779年,数学家拉普拉斯首先给出了“定积分”这一名词,现在使用的定积分号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是1819年到1822年间,由法国数学家富里埃首先使用的,这个符号清楚地表示出积分的上限和下限,应用起来非常方便.

第三章　微积分计算的创立

阿基米德是微积分创立过程中的著名数学家，他提出了著名的“阿基米德公理”. 他在《抛物弓形求积》中用穷竭法求出抛物线弓形的面积. 他的数学思想中蕴含着微积分的思想，成为积分学的萌芽，阿基米德被称为微积分计算的鼻祖.

本部分主要介绍阿基米德的主要贡献、阿基米德的几个故事以及他的微积分著作——《抛物弓形求积》.

一、阿基米德的主要贡献



阿基米德(Archimedes，287B. C～212B. C)，出生于希腊西西里岛叙拉古的贵族家庭，是古代希腊文明所产生的最伟大的数学家及科学家，被誉为“数学之神”和微积分计算的鼻祖. 阿基米德早年曾在亚历山大跟随欧几里德的门生学习，他有许多学术成果是通过与亚历山大学者的通信保存下来的.

阿基米德的贡献涉及数学、力学、天文学等领域. 在数学方面他用“穷竭法”计算出了抛物线弓形的面积和估算出 π 值，给出了三次方程的解法，发明了阿基米德螺线，提出了一套有重要意义的按级计算法，解决了许多数学难题. 在力学方面发现了杠杆原理，

并利用这一原理设计制造了许多机械，发现了浮力定律．在天文学方面也有出色的成就．

阿基米德不仅在理论上成就璀璨，还是一个富有实践精神的工程学家．他一生设计、制造了许多机器，除了杠杆系统外，还有举重滑轮、灌地机、扬水机以及军事上用的投射器等．

阿基米德还是一位爱国主义者，他设计了许多军事器械，抵制住了罗马帝国两年的入侵，后来由于域池失守，被罗马士兵杀害．

阿基米德的科学著作主要有《圆的度量》、《抛物弓形求积》、《论球与圆柱》、《论螺线》、《处理力学问题的方法》，在他的著作中包含许多创造性发现．阿基米德的著作将熟练的计算技巧与严格证明融为一体，并包含了微积分思想的萌芽，被尊为古代数学中精确性与创造性的典范．

二、阿基米德的几个故事

在古代科学家的故事中，关于阿基米德的传说最多，而且每一个故事都非常动听．下面选取几个进行简单介绍．



1.浴池里的发现

传说希罗国王曾请他这位聪明的亲属阿基米德去测定金匠刚制好的王冠,看看是像工匠所说的那样是纯金的,还是掺有银子的混合物.国王事先严厉地告诫阿基米德在测定时不得毁坏王冠.

阿基米德想了很多办法,但都失败了.他朝思暮想,还是茫然不知所措.有一天,当他泡在一满盆水里洗澡时,发现水溢了出来,同时感到身体的重量在水中也减轻了.忽然一个闪念使他联想到,溢出水量的体积等于他身体浸入水中的那部分体积.那么,如果他把王冠浸入水中,根据水面上升的情况,他就能说出王冠的体积.他将王冠的体积与等量金子的体积进行比较,如果两者体积相等,就证明王冠是纯金的;假如王冠内掺有银子的话,王冠的体积就会大些.想到这里,他抑制不住自己喜悦的心情,猛然从浴盆中跃出,全身赤条条地奔到叙拉古的大街上,径直向皇宫跑去,他边跑边喊:“我知道了!我知道了!”故事的结局是王冠确实被掺入一部分银子,造王冠的金匠被处以死刑.这就是阿基米德发现浮力原理的故事.

2.我要移动地球

在埃及,公元前1500年,就有人使用杠杆来抬起重的东西,但是人们不懂得其中的道理,阿基米德细心地研究了这个原理.阿基米德指出,在支点远端的一个小物体,会与支点近端的一个大物体平衡,而且指出该物体的重量和离支点的距离成反比.这一原理解释了为什么一大块顽石能用铁棍撬起的原因.因为铁棍正是一种杠杆,铁棍远端的力与铁棍近端重物的力相平衡.

有一次,阿基米德对叙拉古国王说:“如果给我一个支点,我将移动地球!”国王听了非常吃惊,于是命令他去移动放在海边的一条大船.这条大船体积大,相当重,很多人都因为拉不动而感到束手无策,于是阿基米德设计了一组装置,用钩子钩住一组做成滑轮形式的杠杆.阿基米德非常舒服地坐在椅子上,毫不费劲地用一只手就

把一艘满载货物的大船从港口一直拉到岸上.

3. 用新式武器阻挡罗马军队

阿基米德年老的时候,叙拉古国和罗马之间发生了战争.罗马军队的最高统帅马塞拉斯率领罗马军队包围了他所居住的城市,还占领了海港.阿基米德虽不赞成战争,但又不得不尽自己的天职,保卫自己的祖国.他制造了一种叫做石弩的抛石机,把大石块投向罗马军队的战舰,或者使用发射机把矛和石块射向罗马士兵.阿基米德还发明了多种武器,来阻挡罗马军队的前进.他发明了大型起重机,把罗马的战舰高高地吊起,随后呼地一声将其摔下大海,船破人亡.最后罗马士兵都不敢靠近城墙,只要有一根绳子在上方出现,他们就会被吓跑,因为他们相信那个可怕的阿基米德一定在用一种什么新奇的怪物,会使他们一命呜呼.

4. 镜子聚光

太阳的光和热使地球上的万物生长,它蕴藏着无穷无尽的能量.那么,是谁最早想到把太阳能聚集起来加以利用的呢?

再说叙拉古城遭到罗马军队的侵袭,罗马军队乘着扬帆的战舰,耀武扬威地驶向叙拉古港口,叙拉古城的青壮年和士兵们一起上前线去了,城里只剩下了老人、妇女和孩子,处于万分危急的时刻.

就在这时,年迈的阿基米德为了自己的祖国又站了出来.他让妇女和孩子们每人都拿着自己家中的镜子一齐来到海岸边,让镜子对准强烈的阳光,集中照射到敌舰的主帆上,千百面镜子的反光聚集在船帆的一点上,船帆燃烧起来了,火势趁着风力,越烧越旺,罗马人不知底细,以为阿基米德又发明了新式武器,就慌慌张张地退却了.

5. 没有捷径可以走

阿基米德不仅是一个卓越的科学家,而且是一个很好的老师.他生前培养过许多学生,在这些学生中有一个特别的人物,他是希

腊国王多禄米.

闲着没事的多禄米,有一天忽然心血来潮想学一点儿什么东西.当时,阿基米德已是一位十分著名的科学家了.多禄米想了一想,决定把阿基米德请来,拜他为师,学习一点几何知识.接到国王召见,阿基米德不敢怠慢,急忙来到了皇宫.这里金碧辉煌,气势典雅.白玉大理石铺成的透明地板,水晶珍珠般的吊灯,雕龙刻虎的巨大梁柱,把整座宫殿装扮得格外豪华、漂亮.阿基米德一边欣赏着宫殿中的装饰,心中一边想,这些宏伟的建筑中不知凝结了多少科学家和劳动人民的智慧和心血,尤其是那些精巧、别致的设计,无不反映出建造者们在数学、特别是几何学方面很高的造诣.

从此以后,阿基米德就当上了国王的私人数学教师.刚开始上几何课时,国王挺认真,似乎下了决心要学好这门课.可是,时间一长,多禄米的兴趣就逐渐往下落了,尽管阿基米德讲授的几何学内容都很浅显,但对于不爱学习的国王而言,一堂课的时间简直比一年还长,他日益显出不耐烦的情绪.对国王情绪的变化,阿基米德看到眼里,记在心中.他仍然一如既往的认真讲课.他细心而又耐心地向多禄米讲解着各种几何的图形、原理以及计算方法.可是多禄米对眼前出现的一个个三角形、正方形、菱形的图案毫无兴趣,有点昏昏欲睡了.阿基米德来到多禄米的身边,用手推推他,这位国王勉强睁开惺松的睡眼,没等阿基米德说话,他反而先问:“请问,到底有没有比你的方法简捷一些的学习几何学的方法和途径?用你这种方法实在太难学了.”

听了国王的问题,阿基米德思考着,冷静地回答道:“陛下,乡下有两种道路,一条是供老百姓走的乡村小道,一条是供皇家贵族走的宽阔的坦途,请问陛下走的是哪一条道路呢”,“当然是皇家的坦途呀”!多禄米回答得十分干脆,但又感到茫然不解.阿基米德继续说:“不错,您当然是走皇家的坦途,但那是因为您是国王的缘故.可现在,您是一名学生.要知道,在几何学里,无论是国王还是

百姓，也无论是老师还是学生，大家只能走同一条路.因为，走向学问是没有什么皇家大道的.”国王多禄米眨巴着眼睛，似懂非懂地思考了一下，总算理解了阿基米德这番话的含义，于是重新打起精神，听阿基米德继续讲课.

6.别弄坏我的图

公元前212年，罗马军队进入了叙拉古城.罗马军队的统帅马塞拉斯下了一道命令：“要活捉阿基米德”.在战争失败后，阿基米德对现实采取了学者的超然漠视的态度，专心致力于数学问题的研究.

有一天，阿基米德坐在残缺的石墙旁边，正在沙地上画着一个几何图形.一个罗马士兵命令阿基米德离开，他傲慢地做了个手势说：“别弄坏我的图！”罗马士兵勃然大怒，马上用刀一刺，就杀死了这位伟大的科学家.

阿基米德被杀的消息传来，最为惋惜的就是那位罗马军队的统帅马塞拉斯，他处死了杀害阿基米德的士兵并为阿基米德举行了隆重的葬礼.阿基米德的遗体葬在西西里岛，墓碑上刻着一个圆柱内切球的图形，以纪念他在几何学上的卓越贡献.

三、微积分著作《抛物弓形求积》

《抛物弓形求积》是阿基米德对微积分作出贡献的一部重要著作，在这部著作中，他把欧几里得的严格推理的逻辑方法与柏拉图先天的丰富想象和谐地结合起来，把欧多克斯等人的穷竭法与德莫克利特的原子论观念结合起来.他提出了著名的阿基米德公理，用现代数学语言表述为：对于任何两个正数a,b，如果$a<b$，则必有自然数n，使$n\times a>b$.

阿基米德确定了抛物线弓形、螺线、圆形的面积以及椭球体、抛物面体等各种复杂几何体的表面积和体积的计算方法.

阿基米德在《抛物弓形求积》中的许多新发现是通过力学手

段得到的，最终从几何学上加以证明，全篇共 24 个命题.

阿基米德在《抛物弓形求积》一书中，使用穷竭法求出了抛物线弓形的面积："由一抛物线与其一条弦围成的抛物弓形的面积等于与抛物弓形同底等高的三角形面积的$\frac{4}{3}$."（命题 24）

阿基米德用两种方法求得上述结论，首先运用了力学方法，在命题 16 中给出：

"抛物弓形以 Qq 为底（q 到弓形顶点的距离不远于 Q），过 q 点作直线 qE 平行于抛物线的轴，且与 Q 点的切线相交于 E，证明弓形的面积等于 $\triangle EqQ$ 的面积的三分之一."

之后他运用一系列定理（命题 18 ～ 24）给出了严格的数学证明.

阿基米德的证明使用了穷竭法，但该处与他的其他著作中所采用的穷竭法的形式不同，没有用通常的扩约，而是采用了我们可称之为逼近的方法. 他用一系列三角形"穷竭"抛物弓形（见图 3-1）.

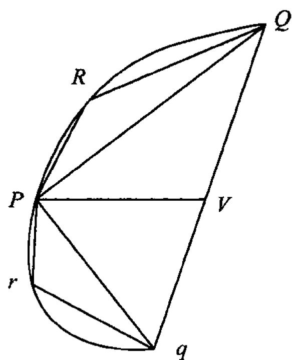


图 3-1

如果 A_1 为原三角形（P 为抛物线顶点），以此三角形的两边为底所作的两小三角形之和为 $\frac{1}{4}A_1$，继续此程序，各小三角形之和依次为

$$\frac{1}{4^2}A_1, \frac{1}{4^3}A_1, \cdots$$

为证明抛物弓形的面积等于$\frac{4}{3}A_1$，阿基米德首先在命题 22 中证明了以上序列的有限项之和小于弓形的面积，之后在命题 23 中证明了：

如果序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 满足条件 $A_1 = 4A_2, A_2 = 4A_3, \cdots$ 则 $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1$.

由以上结论及《几何原本》第 X 卷命题 1，阿基米德利用双重归谬法证明了抛物弓形面积等于$\frac{4}{3}A_1$，这里他实际上是求出了一个无穷几何级数的和. 推演这个公式的过程类似于现代微积分中所说的逐步近似求极限的方法.

他在《抛物弓形求积》一书中，在还计算出了以他的名字命名的曲线——阿基米德螺线 $\rho = a\theta$，($a > 0$) 第一周围成的区域的面积.

他的求法用今天的符号表示就是：将 2π 作 n 等份，在每一部分上做出顶角为$\frac{2\pi}{n}$的内接圆扇形和外接圆扇形（见图 3-2），它们的面积之和，分别用 A_n, S_n 表示，显然所求之面积 S 满足不等式 $A_n < S < S_n$，经过计算

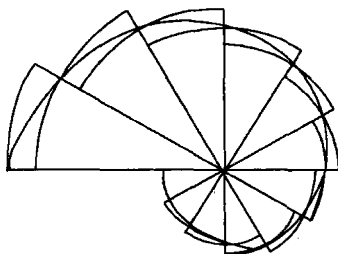


图 3-2

$$A_n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

$$S_n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

于是，对任意的 n，有 $A_n < \frac{4}{3}\pi^3 a^2 < S_n$.

阿基米德经过猜测，并使用反证法进行了证明，得出螺线第一周所围成的面积 $S_n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$.

在这里他使用了类似于现代积分学中的大和、小和的概念，他突破了传统的有限运算，大胆地采用了无限逼近的思想，从而将穷

竭法发展到了高峰.但是由于当时没有极限概念,不承认无限,因此,穷竭法仍是有限的形式,并且局限在几何直观上,运算也很繁琐,所以自阿基米德之后,很长时间没有被人重视,尽管这种方法有很大的缺点,但是他的求积方法已具有定积分思想的萌芽.

《抛物弓形求积》与阿基米德的其他著作一样体现了阿基米德数学论证的高度严格性,他清楚地意识到物理论证和数学证明之间的区别,这一点在数学史上得到了高度评价.

第四章　函数概念与函数思想

函数是数学中最重要的基本概念，也是微积分的研究对象．“用函数来思考”是大数学家克莱因领导的数学教育改革运动的口号．函数概念经历了漫长的发展过程，函数概念蕴涵着丰富的辩证思想，函数思想有着广泛的应用．

本部分主要介绍函数概念的产生与发展、函数思想及其在微积分中的体现．

一、函数概念的产生与发展

函数概念的萌芽，可以追溯到古代对图形轨迹的研究．随着社会的发展，人们逐渐发现，在所有已经建立起来的数的运算中，某些量之间存在着一种规律：一个或几个量的变化，会引起另一个量的变化，这种从数学本身的运算中反映出来的量与量之间的相互依赖关系，就是函数概念的萌芽．

在代数学的方程理论中，对不定方程的求解，使得人们对函数概念逐步由模糊趋向清晰．

恩格斯指出：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学．”

笛卡儿在 1637 年出版的《几何学》中，第一次涉及到变量，他

称为“未知和未定的量”，同时也引入了函数的思想．他在指出 y 和 x 是变量的时候，已注意到 y 依赖于 x 而变．

英国数学家格雷果里(James Gregorg，1638 ～ 1675) 在 1667 年给出的函数的定义，被认为是函数解析定义的开始．

格雷果里在“论圆和双曲线的求积”中将函数定义为：

“从一些其他量经过一系列代数运算或任何其他可以想象的运算而得到的一个量．”

这里的运算指的是五种代数运算以及求极限运算，但这一定义未能引起人们的重视．

一般公认最早给出函数定义的是德国数学家莱布尼兹．莱布尼兹在 1673 年的一篇手稿中，把任何一个随着曲线上的点变动而变动的几何量，如切线、法线、点的纵坐标都称为函数；并且强调这条曲线是由一个方程式给出的．莱布尼兹又在 1692 年的论文中，称 x 幂的 x，x^2，x^3 等为 x 的幂数，把幂与函数看作同义语，以后又用“函数”表示依赖于一个变量的量．

函数概念被提出后，由于微积分学的发展，函数概念也不断进行扩张，日趋深化．致使函数概念逐渐精确化、科学化．函数概念在发展过程中，大致经过了以下几个阶段的扩张．

第一次扩张主要是解析扩张，提出了“解析的函数概念”．瑞士数学家约翰 · 伯努利于 1698 年给出了函数新的定义：由变量 x 和常量用任何方式构成的量都可以叫做 x 的函数．这里的“任何方式”包括了代数式子和超越式子．

1748 年欧拉在《无穷小分析引论》中给出的函数定义是：“变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的．”

1734 年欧拉还曾引入了函数符号 $f(x)$，并区分了显函数和隐函数、单值函数和多值函数、一元函数和多元函数等．

在 18 世纪占主要地位的观点是，把函数理解为一个解析表达

式(有限或无限的).

第二次扩张是几何方面的扩张,提出了"几何的函数概念".18世纪中期的一些数学家发展了莱布尼兹将函数看作几何量的观点,而把曲线称为函数(因为解析表达式在几何上表示为曲线).

达朗贝尔在1746年研究弦振动问题时,提出了用单独的解析表达式给出的曲线是函数,后来欧拉发现有些曲线不一定是由单个解析式给出的,因此提出了一个新的定义,函数是:"xy 平面上随手画出来的曲线所表示的 y 与 x 的关系."即把函数定义为由单个解析式表达出的连续函数,也包括由若干个解析式表达出的不连续函数(不连续函数的名称是由欧拉提出的).

第三次扩张,朴素地反映了函数中的辩证因素,体现了"自变"到"因变"的生动过程,形成了"科学函数定义的雏型".1775年,欧拉在《微分学》一书中,给出了函数的另一定义:"如果某些变量,以这样一种方式依赖于另一些变量,即当后者变化时,前者也随之变化,则称前面的变量为后面变量的函数."值得指出的是,这里的"依赖"、"随之变化"等等的含义仍不十分确切.这个定义限制了概念的外延,它只能算函数概念的科学雏型.

在这次函数概念的扩张中,19世纪最杰出的法国数学家柯西在1821年所著的《解析教程》中,给出了如下函数定义:"在某些变量间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变量的值,其他变量的值也随之确定,则将最初的变量称为自变量,其他各个变量称为函数."这个定义把函数概念与曲线、连续、解析式等纠缠不清的关系给予了澄清,也避免了数学意义欠严格的"变化"一词.函数是用一个式子或多个式子表示,甚至是否通过式子表示都无关要紧.

第四次扩张,可称为"科学函数定义"进入精确化阶段.德国数学家狄利克雷于1837年给出了函数定义:

"若对 x $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的每一个值,y 总有完全确定的值与之

对应，不管建立起这种对应的法则的方式如何，都称 y 是 x 的函数”.

这一定义彻底地抛弃了前面一些定义中解析式的束缚，强调和突出函数概念的本质，即对应思想，使之具有更加丰富的内涵.因而，此定义才真正可以称得上是函数的科学定义，为理论研究和实际应用提供了方便.

狄利克雷还给出了著名的函数（人们称为狄利克雷函数），这个函数是难以用简单的包含自变量 x 的解析式表达的，但按照上述定义的确是一个函数.

为使函数概念适用范围更加广泛，人们对函数定义作了如下补充：

“函数 $y=f(x)$ 的自变量，可以不必取 $[a,b]$ 中的一切值，而可以仅取其任一部分.”

换句话说就是 x 的取值可以是任意数集，这个集合中可以有有限个数，也可以有无限多个数，可以是连续的，也可以是离散的.这样就使函数成了一个非常广泛的概念.但是，自变量及函数仍然仅限于数的范围，而且也没有意识到“函数”应当指对应法则本身.

我们在中学里接触到的函数，都是解析函数，在高等数学里我们会接触到更广泛的函数.

如：分段函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}$

积分表示的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，

级数表示的函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

第五次扩张，提出了“近代函数定义”.美国数学家维布伦的函数定义，是建立在重新定义变量、变域和常量的基础上的.所谓变

量，是代表某集合中任意一个“元素”的记号，由变量所表示的任一元素，称为该变量的值. 变量 x 代表的“元素”的集合，为该变量的变域，而常量是上述集合中只包含一个“元素”情况下的特殊变量. 这样的变量与常量的定义，比原来的定义更趋一般化了，而且克服了以往变量定义的缺陷，变量“变动”改进为变量在变域（集合）中代表一个个元素.

利用这一变量的定义，维布伦给出了近代函数定义：

“设集合 X、Y，如果 X 中每一个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，那么我们就把此对应叫做从集合 X 到集合 Y 的映射，记作 $f:X \to Y, y = f(x)$.”

映射的特殊情况，从数集到数集的映射就是前面狄利克雷的函数定义；从“数集”到“集”仅一字之差，但含意却大不相同. 从而使函数概念摆脱了数的束缚，使得函数概念能广泛地应用于数学的各个分支及其他学科中.

第六次扩张，提出了“现代函数定义”.

19 世纪康托尔创建了集合论，函数概念进入了集合论的范畴，使函数概念纯粹地使用集合论语言进行定义.

在这种情形下，函数、映射又归结为一种更为广泛的概念——关系.

“设集合 X、Y，定义 X 与 Y 的积集 $X \times Y$ 如下：$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. 积集 $X \times Y$ 中的一个子集 R 称为 X 与 Y 的一个关系，若 $(x,y) \in R$，则称 x 与 y 有关系 R，记为 $xR(y)$；若 $(x, y) \notin R$，则称 x 与 y 无关系 R. 设 f 是 x 与 y 的关系，即 $f \subset X \times Y$，如果 (x,y)、$(x,z) \in f$，必有 $y = z$，那么称 f 为 X 到 Y 的映射或函数.”

这就是现代的函数定义，它在形式上回避了“对应”术语，使用的全部是集合论的语言，一扫原来定义中关于“对应”的含义存在着的模糊性，而使函数念更为清晰、正确，应用范围更加广泛了.

20 世纪以来，函数概念不断扩充. 函数不仅是变数，还可以是其他变化着的事物. 还出现了所谓广义函数以及函数的函数等等. 以研究函数为己任的分析学，成为数学的三大基本分支之一，形成几何、代数、分析三足鼎立的局面. 在分析学中，函数论占有重要地位，它又划分为实函数论与复函数论两大部分.

二、函数思想及其在微积分中的应用

函数思想就是运用函数的方法，必要时引入辅助函数，将常量视为变量、化静为动、化离散为连续，将所讨论的问题转化为函数问题来解决的一种思想. 函数思想贯穿于整个微积分之中.

1. 以函数为桥梁，实现函数与方程、不等式间的转化

方程与函数相比，前者是静止，后者是运动. 方程的根可视为对应函数在某种特定状态下的值. 当研究方程问题时，特别是证明方程根的存在性与个数时，我们可以从函数的观点出发，将方程的一边设为函数，利用讨论函数的性质得到对方程的研究，化静为动、化难为易、化繁为简.

例如我们证明方程 $\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根. 只需作函数

$$f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2},$$

因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=+\infty,$$

$$f(\mathrm{e})=1-1-\sqrt{2}=-\sqrt{2}<0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-\sqrt{2}\right)=+\infty.$$

由根的存在定理知，$f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内各至少有一个零点，即方程在 $(0,+\infty)$ 内至少有两个实根.

我们在证明不等式（特别是常数不等式、积分不等式）时，可

以将不等式问题转化为函数问题，为解决问题带来方便.

例如我们要证明常数不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|},$$

可构造一个与之相似的辅助函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，通过讨论函数的单调性得到不等式的证明.

2. 以函数为背景，实现函数思想在数列中的应用

数列和函数相比，前者离散，后者连续. 从函数的观点出发，将数列问题转化为相应的函数问题，是求数列问题的一种有效方法.

例如我们要求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项，若要通过比较的方法来求解，相当困难. 我们采用函数的方法来求解，将数列 $\sqrt[n]{n}$ 化为函数 $f(x)=\sqrt[x]{x}$，在 $(0,+\infty)$ 上作一般讨论就容易.

3. 化离散为连续，解决级数问题

例如我们要求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和，可引入一个适当的函数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}.$$

利用函数项级数的逐项微分法，可求得

$$s(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

从而得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$

4. 引入辅助函数，证明有关理论证明问题

例如牛顿和莱布尼兹在证明微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

时，首先引入辅助函数——变上限定积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，证明 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$，再令 $x=b$ 得到所要证明的结论. 这是用函数思想研究问题的典型代表. 另外利用介值定理、微分中值定理证明等式时，一般也都是通过设辅助函数的方法来解决.

再如：设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$ 我们只需作辅助函数：$F(x)=f(x)e^{g(x)}$，由罗尔定理即可证得.

5. 引入含参量积分函数或二重积分，求某些定积分、广义积分的值

例如我们在计算著名的狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 和定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 时，就是引入含参量积分函数 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 和 $I(y)=\int_0^1\frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 求出的；再如计算概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 时，就是引入二重积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y$，通过二重积分的极坐标变换法求出的.

第五章　基本初等函数

微积分的研究对象是函数,初等函数是函数的重要组成部分,它们又是现代数学的基本要素和重要工具,基本初等函数一般指以下六类函数:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.所有初等函数都由它们的加、减、乘、除、乘方、开方和各种复合而成.

本部分主要介绍基本初等函数的特征性质、对数函数的发明以及指数函数的威力故事.

一、基本初等函数的特征性质

在初等函数的诸多性质中,哪些是它的基本属性?或者说,有哪些性质只为它所具备,而别的函数没有这些性质?这些性质决定了函数本身,我们把决定函数命运的一组性质叫做特征性质.

幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$(α 为实数)的特征性质 $f(xy)=f(x)f(y)$.

指数函数 $f(x)=a^{x}(a>0,a\neq 1)$ 的特征性质 $f(x+y)=f(x)f(y)$,即 $a^{x+y}=a^{x}a^{y}$,这个运算公式为指数函数所独具有,其他任何函数都没有这种运算性质.

对数函数 $f(x)=\log_{a}x,(a>0,a\neq 1)$ 的特征性质 $f(xy)=f(x)+f(y)$,即 $\log_{a}xy=\log_{a}x+\log_{a}y$,这个运算公式为对数函

数所独具有，其他任何函数都没有这种运算性质.

正弦函数 $f(x) = \sin x$ 和余弦函数 $f(x) = \cos x$，有许多优良性质和运算公式. 其中有一条是最重要的，那就是 $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$，任何其他一对函数都没有这种运算公式.

二、对数函数的发明

对数是 17 世纪人类最重大的发明之一. 纳皮尔的对数、笛卡儿的解析几何、牛顿与莱布尼兹的微积分三者齐名，被誉为“历史上最重要的数学方法”. 恩格斯在他的著作《自然辩证法》中称它们为 17 世纪的三大数学发明.

16 世纪末至 17 世纪初的时候，当时在自然科学领域(特别是天文学) 的发展上经常遇到大量精密而又庞大的数值计算，如，航海人员为了确定船舶在大海中的航程与位置，天文工作者为了处理观察行星运动所得的数据，都必须对具有很多数位的数作繁复的计算. 于是数学家们积极寻求化简的计算方法.

德国的史提非(1487 ～ 1567) 在 1544 年所著的《整数算术》中，写出了两个数列，左边是等比数列(叫原数)，右边是一个等差数列(叫原数的代表，或称指数). 欲求左边任两数的积(商)，只要先求出其代表(指数) 的和(差)，然后再把这个和(差) 对向左边的一个原数，则此原数即为所求之积(商)，可惜史提非并未作进一步探索，没有引入对数的概念.

对数的创始人是苏格兰数学家纳皮尔(Napier，1550 ～ 1617 年)，纳皮尔对数字计算很有研究，由他发明的作乘除法用的“纳皮尔算筹”与球面三角中的“纳皮尔比拟式”等在当时都颇负盛名. 但是这些成就与他所创始的对数比起来就显得微不足道了.

纳皮尔从 1594 年开始研究对数、编制可供实用的对数表，在经历了 7300 个日日夜夜之后，一本厚达 200 页的八位对数表终于诞生了. 1614 年发表《关于奇妙的对数法则的说明》一书，向世人

公布了他的对数发明，书中论述了对数的性质，并解释了这项发明的特点. 当时指数概念尚未形成，纳皮尔不是从指数出发，而是通过研究直线运动得出对数概念的. 他发明对数的动机是为寻求球面三角计算的简便方法，他依据一种非常独特的与质点运动有关的设想构造出所谓对数方法，其核心思想表现为算术数列与几何数列之间的联系.

纳皮尔发明的对数，记为 $\text{Nap}\cdot\log x$，它与自然对数的关系为 $\text{Nap}\cdot\log x = 107\ln(107/x)$. 由此可知，纳皮尔对数既不是自然对数，也不是常用对数，与现今的对数有一定的距离

与纳皮尔同时代的瑞士人别尔基(Bürgi，1552 ～ 1632 年) 也独立地发现了对数，可能还早于纳皮尔，但迟至 1620 年才发表，这时纳皮尔对数已经闻名全欧洲了.

英国数学家布里格斯(Briggs，1561 ～ 1630 年) 最先认识到对数的重要性. 他于 1616 年专程去苏格兰拜访纳皮尔，并提出改良对数的建议，以便于应用，第二年纳皮尔逝世，布里格斯以全部精力继承纳皮尔的事业，于 1624 年出版《对数算术》一书，公布了以 10 为底的十四位对数表，这种对数被称为常用对数.

当今中学数学教科书是先讲“指数”，后以反函数形式引出“对数”的概念. 但在历史上，恰恰相反，对数概念不是来自指数. 直到 1748 年欧拉在他的名著《无穷小分析寻论》中才发现指数与对数的天然联系，明确提出了对数函数是指数函数的逆函数，他通过取对数函数的反函数发明了指数函数，以 e 为底的对数(自然对数)也是欧拉给出的.

对数的发明对当时社会的发展起了重要的影响，正如科学家伽利略(1564 ～ 1642) 说：“给我时间，空间和对数，我可以创造出一个宇宙.” 又如 18 世纪数学家拉普拉斯(1749 ～ 1827) 亦提到：“对数用缩短计算的时间来使天文学家的寿命加倍.” 纳皮尔用自己 20 年的计算，换来了人世间无数寿命的延续！拉普拉斯还说：

“如果一个人的生命是拿他一生中的工作多少来衡量，那么对数的发明，等于延长了人类的寿命！”不幸的是，纳皮尔的工作虽然延长了他人的寿命，却没能使自己的生命得以延长.就在纳皮尔著作发表后的第三个年头，公元 1617 年，这位永受后人缅怀的杰出数学家，终因劳累过度，不幸谢世.

三、几个指数函数的威力故事

指数函数不仅在数学、物理、天文上应用极广，而且在其他自然科学甚至社会科学上也大有用场.指数函数常被用来作为描述自然成长的模式，以指数规律变化的自然现象和社会现象，有一种极为重要的特性，就是其成长之快速是令人惊讶的！下面就是显示指数函数威力的几个故事.

1. 阿凡提智斗财主



阿凡提听说有个财主经常欺负穷人，就想想个办法惩罚他.有一天，阿凡提来到财主家中，对财主说：“请允许我在你家干一份粗活，以赚点工钱.我的要求很低，每天的工钱就按前一天的 2 倍计算：第一天给我 1 粒米，第二天 2 粒米，第三天 4 粒米，第四天 8 粒米……一个月后，前 29 天的米我都不要，只要把第 30 天的米给我就行了.”财主一听，世上哪有这等便宜事，于是就满口答应.时间过得真快，一晃眼，一个月就过去了，阿凡提来到财主家中结算工钱，一阵“噼里啪啦”的算盘响过之后，财主一看，顿时傻了眼.财主为什么会傻眼，他应该给阿凡提多少米呢？

2. 富兰克林的遗嘱



美国著名的科学家，避雷针的发明人，本杰明·富兰克林(1706 ~ 1790). 一生为科学和民主革命而工作，他死后留下的财产只有 1000 英镑. 令人惊讶的是，他竟留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱！这份有趣的遗嘱是这样写的："……我将一千英镑赠给波士顿的居民，如果他们接受了这一千英镑，那么这笔钱应该托付给一些挑选出来的公民，他们得把这钱按每年 5% 的利率借给一些年轻的手工业者去生息. 这笔款子过了 100 年增加到 131000 英镑. 我希望，那时候用 100000 英镑来建立一所公共建筑物，剩下的 31000 英镑拿去继续生息 100 年. 在第二个 100 年末了，这笔款增加到 4061000 英镑，其中 1061000 英镑还是由波士顿的居民来支配，而其余的 3000000 英镑让马萨诸州的公众来管理. 过此之后，我可不敢多作主张了！"

富兰克林，留下区区的 1000 英镑，竟立了百万富翁般的遗嘱，莫非昏了头?！让我们按照富兰克林非凡的设想实际计算一下. 实际上是 $y = 10.5^n$，当 $n = 100$，$y = 10.5^{100} = 131501$

即 100 年后，这比富兰克林遗嘱中写的还多出 501 英镑. 在第二个 100 年末，他拥有的财产就更多了，可见富兰克林的遗嘱在科学上是站得住脚的. 由此可见指数函数的威力.

3. 玫瑰花悬案

历史上因指数函数吃亏的，也不乏其人，大名鼎鼎的拿破仑就是其中的一位.

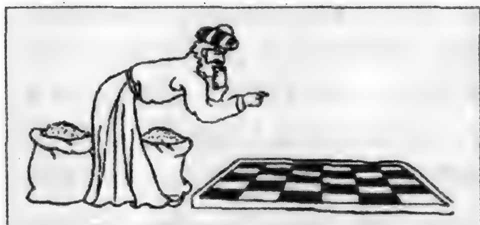
1797 年，伟大的拿破仑皇帝陪同他新婚的妻子约瑟芬皇后参

观了卢森堡大公国第一国立小学. 在那里,受到全校师生的热情款待. 孩子们莺歌燕舞,园丁们虔诚殷勤,餐桌上美味佳肴. 这使得拿破仑夫妇很过意不去. 在辞别的时候,拿破仑慷慨、潇洒地给该校校长送上一束价值 3 个金路易的玫瑰花. 他说:"为了答谢贵校对我,尤其是对我夫人约瑟芬的盛情款待,我不仅仅今天呈上一束玫瑰花,并且在未来的日子里,只要我们的法兰西国家存在一天,每年的今天我将亲自派人送给贵校一束价值相等的玫瑰花,作为法兰西与卢森堡友谊的象征."然而,事过境迁,疲于连绵的战争和此起彼伏的政治斗争,最终残败并被流放的拿破仑,把在卢森堡的许诺早忘的一干二净. 可是,卢森堡这个欧洲小国,却把这段"欧洲巨人与卢森堡孩子亲切和睦相处的一刻"载入了他们的史册,还编成画册和儿童文学故事,成了一则脍炙人口的美谈.

历史前进的脚步一刻也不停息,转眼近一个世纪的时光过去了. 1894 年,这件相隔近 1 个世纪的故事却给法国惹了个大麻烦——卢森堡政府通知法国政府,提出了"玫瑰花悬案"索赔. 要求:要么自 1797 年起,用 3 个金路易作为一束玫瑰花的本金,以五厘复利记息(就是利滚利)结算,全部偿清这笔玫瑰花外债,共计 1375596 法郎;要么法国各大报纸承认你们的一代伟人拿破仑是个无信的小人. 这一历史公案使法国政府处于极为尴尬的局面,因为只要法国存在一天,此案就永无了结的可能. 但是为了拿破仑的声誉,法国政府还是准备支付这笔巨款. 但是,又出现了另一个问题,如果法国政府支付这笔外债,也是承认伟大的拿破仑没有履行自己的承诺.

经过一番冥思苦想,法国人用如下措辞取得了卢森堡人的谅解:"今后,无论在精神还是物质上,法国将始终不渝的对卢森堡大公国的中小教育事业予以支持和赞助,来兑现我们的拿破仑将军那一诺千金的'玫瑰花'誓言."

4. 国王与国际象棋



在印度 Shirim 王的时代，其国师西塔(Sissa)发明了西洋棋(现称为国际象棋)，西塔把他的发明成果献给国王，国王对他的发明很赏识，决定好好奖励他，奖赏方式是在棋盘的每个空格各放一块黄金送给他，Sissa 婉谢了国王的好意. 但国王不同意，表示愿意满足他提出的任何要求. 于是西塔提出了下面的要求："象棋的棋盘共有 64 格，希望国王能赐给第一格 1 粒麦子，第二格 2 粒麦子，第三格 4 粒麦子，第四格 8 粒麦子，以此类推，一直倍增到第 64 格".

国王对 Sissa 如此谦逊的要求感到很不解，认为 Sissa 真有古大臣之风，遂叫来了一位侍卫拿一袋大米，依次放进 $1,2,2^2,2^3,\cdots$ 粒米于各格中，到第 12 格时，米就放不进格子里啦，就将米堆到棋盘旁边，到第 20 格时，袋中的米就空啦，于是国王要侍卫去多拿几袋来…… 最后国王放弃了，他终于理解到，即使把皇宫中的所有米都搬出来，也放不满 64 格棋盘.

如果我们把 64 个格子放满麦粒，就多达 $2^{264}-1\approx 1.84\times 10^{19}$ 粒，这几乎相当于当今全世界两千年小麦的产量.

5."海拉"的生长

癌症对人类的威胁越来越引起国际社会的关注. 人们意识到：对付人类的共同敌人，不应当存在国界. 1972 年，再次当选为美国总统的尼克松，建议美国和前苏联两国联合攻克癌症. 建议立即被采纳，最直接的结果是双方互赠研究成果：美方赠送的是供研究的 23 种致癌病毒，苏方回赠的是 6 名癌症患者的癌细胞标本.

1973 年 1 月，美国国立癌采研究中心决定，将苏联的癌细胞标

本分送给几位科学家研究.其中的一份,送到了加州细胞培养实验所所长尼尔森苗斯博士手上,博士在显微镜下仔细检查了全部标本,惊奇地发现这些细胞染色体的第 23 对,全部都是女性的 X 型因子!博士对此百思而不解,转而求教于生物学家皮特森教授.教授对培养物进行了严格的查验,结果得出了更加令人震惊的结论:所有的培养物,清一色地含有一种特殊的酶,而这种酶几乎只有黑色人种才会有.

尼尔森苗斯决心对此弄个水落石出.经过几番周折,终于弄清了,所有苏方赠送的 6 种标本,全是 20 多年前死去的美国黑人拉克丝的细胞!原来,拉克丝 1951 年 10 月死于一种罕见的子宫颈癌.这种特殊的癌细胞具有极强的繁殖力和生命力.拉克丝从发现第一个病灶到死亡,整个过程不足 8 个月.这对于普通的子宫颈癌来说,是绝无仅有的.拉克丝死时情状极惨,整个腹腔几乎都被癌细胞所占领!科学家们提取这种癌细胞加以培养,发现这些癌细胞竟以 $y = A_0 \cdot 2^x$(A_0 为原始数量,x 为天数)这样的指数曲线疯狂地生长,就这样,这种新发现的癌细胞被命名为"海拉",并被严格控制于实验室.

"海拉"细胞在不足一个月时间内,便能增加数千万倍,这使过去一直认为的、健康细胞"自发"转变为癌细胞的神秘现象,得到了新的解释.原来所谓"自发"转变,只不过是"海拉"细胞消灭并占领了整个培养物!

然而事过 20 多年,"海拉"细胞不仅没有死亡,而且还令人费解地流到国外,尼尔森苗斯博士撰文向全世界敲起了警钟:"如果听任'海拉'细胞在最适宜的情况下毫无抑制地生长,那么到现在为止,它们很可能已经占领整个世界!"

第六章　微积分中的分段函数

微积分的研究对象是函数，主要是初等函数和部分非初等函数. 一般说来，分段函数是非初等函数，分段函数由于其定义符号、性质、讨论方法的特殊性，成为高等数学研究的重要内容.

本部分主要介绍四个特殊的分段函数：符号函数、狄利克雷函数、黎曼函数和取整函数.

一、符号函数的定义与特征

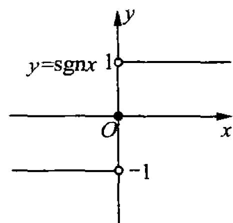


图 6-1

人们把函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$

定义为符号函数.

其中记号 sgn 由拉丁文 signum(符号，正负号) 得来.

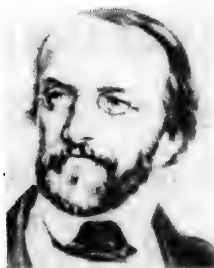
符号函数的功能是将一个数或计算结果变成相应的符号，易知 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

符号函数的定义域为 **R**，值域为 $\{-1,0,1\}$，图像如图 6-1 所示，在 **R** 上是递增函数(但不严格递增)、有界函数、奇函数、非周期函数.

符号函数的特征性质：在定义域 **R** 只有一个无极限点($x=0$)，只有一个不连续点($x=0$)，只有一个不可导点($x=0$)；在任何闭区间上都可积，但在含有 0 点的区间上没有原函数.

二、狄利克雷与狄利克雷函数

1. 极有洞察力的数学家 —— 狄利克雷



狄利克雷(Dirichlet，1805 ~ 1859)，德国数学家，曾在哥廷根受业于高斯，参加过以傅里叶为首的青年数学家小组，1839 年任柏林大学教授，1885 年高斯逝世后，他作为高斯的继任者被哥廷根大学聘任为教授.

狄利克雷在数学与力学两个领域都作出了名垂史册的重大贡献，尤以分析、数论、位势论为最. 在分析方面，他最卓越的工作是对傅里叶级数收敛性的研究；1829 年在其论文《关于三角级数的收敛性》中，第一次对傅里叶级数的收敛性给出了严谨的证明，得到了函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛的第一个充分条件：

"对于在$[-\pi,\pi]$内有定义且有限的、逐段连续且逐段单调的函数 $f(x)$，其傅里叶级数在$(-\pi,\pi)$内收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，在端点 $x=\pm\pi$ 处收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$."

狄利克雷是数学史上第一位重视概念的人，并且是有意识地"以概念代替直觉"的人. 在狄利克雷之前数学家们主要研究具体函数，进行具体计算，不大考虑抽象问题. 但狄利克雷将函数做了一般化的推广，1837 年，狄利克雷给出了与我们现在所熟知的函数定义非常相近的函数的如下定义(区间一般是指两个实数之间的所有实数)："如果对于给定区间上的每一个 X 值，都有唯一的 Y

值与它对应,那么 Y 是 X 的函数."这之后,人们开始考虑函数的各种性质,例如(图像的)对称性、增减性、连续性等,使具体函数的计算逐渐淡化.

1829 年狄利克雷给出了与传统上截然不同的著名函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

狄利克雷还讨论了当 μ 无限增加时积分 $\int_0^a f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}\mathrm{d}x$,$(a>0)$ 与 $\int_a^b f(x)\frac{\sin\mu x}{\sin x}\mathrm{d}x$,$(b>a>0)$ 的性质问题(后人将 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 称之为狄利克雷积分).

1837 年狄利克雷证明了:对于一个绝对收敛的级数,可以把它的项加以组合或重新排列,而不改变原级数的和;并且举例说明了一个条件收敛的级数其项经过一定的重新排列,而使级数的收敛和发生改变.

狄利克雷也是解析数论的创始人之一. 1837 年他创立了在解析数论中有重要的地位的狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-z}$,($a_n$,$z$ 为复数),1838～1839 年发展了代数数域中关于单位的一般理论,已对阿贝尔群的特征指标作了一般性的描述.

2. 狄利克雷函数的定义与特征

1829 年狄利克雷将函数做了一般化的推广,提出了著名函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

后人称之为狄利克雷函数.

这个函数具有三个特点:

(1) 没有解析式:使函数概念从解析式中解放了出来.

(2) 没有图形:使函数概念从几何直观中解放了出来.

(3) 没有实际背景：使函数概念从客观世界的束缚中解放了出来.

狄利克雷函数的出现，表示数学家们对数学的理解发生了深刻的变化，数学的一些“人造”特征开始展现出来. 这种思想也标志着数学从研究“算”，转变到了研究“概念、性质、结构”.

狄利克雷函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{0,1\}$，在 $\mathbf{R}$ 上是有界函数、偶函数、周期函数(任何有理数都是它的周期，但无基本周期)、在任何区间内都不是单调函数.

狄利克雷函数的特征性质：在定义域 $\mathbf{R}$ 上处处无极限、处处不连续、处处不可导、在任何闭区间上都不可积(指不黎曼可积).

狄利克雷函数作为微积分中的一种构造性函数，有着一些特殊的性质，因此在数学发展过程中起过重要的作用，帮助澄清过许多模糊概念，并可构造出一些反例来判断一些命题或陈述的真伪. 如：此函数常用来说明周期函数不一定有最小正周期，有界函数不一定黎曼可积，以及构造只有一个连续点的函数

$$f(x) = x\mathrm{D}x = \begin{cases} x, x \text{ 为有理数}, \\ 0, x \text{ 为无理数}, \end{cases} (f(x) \text{ 只有一个连续点 } x = 0).$$

三、黎曼与黎曼函数

1. 最具独创精神的数学家 —— 黎曼



黎曼(Riemann，1826 ～ 1866)，德国数学家，19 岁进入哥廷根大学学习哲学和神学，在大学里被数学教学和研究的气氛所感染，便放弃神学转攻数学，在大学期间有两年去柏林大学就读，在那里深受雅可比、狄利克雷的影响. 1849 年回到哥廷根大学，并有幸成为高斯的学生，一直过着贫困的生活，直到 1859 年才被聘为教授.

黎曼 1851 年的博士论文《单复变函数的一般理论的基础》,被认为是近代数学史上最重要的文献之一,他把单值解析函数推广到多值解析函数,并引入"黎曼曲面"的重要概念,从而确定了复变函数的几何基础.黎曼、柯西和维尔斯特拉斯是公认的复变函数论的主要奠基人.

黎曼对数学最重要的贡献还在于几何方面,他开创的高维抽象几何的研究,处理几何问题的方法和手段是几何史上一场深刻的革命,他建立了一种全新的后来以其名字命名的几何体系——黎曼几何,对现代几何乃至数学和科学各分支的发展都产生了巨大的影响.

黎曼对完善微积分理论也作出了杰出的贡献.黎曼给出著名的黎曼函数,指出可积函数不一定是连续的.在关于连续性与可微性的关系上,他那个时代的几乎所有的数学家都相信"连续函数一定是可微的",黎曼给出了一个连续而不可微的著名反例,最终讲清连续与可微的关系.黎曼建立了现在微积分教科书所讲的黎曼积分的概念,给出了这种积分存在的必要充分条件.

黎曼还开创了用复数解析函数研究数论问题的先例,取得"解析数论"跨世纪的成果,他将素数分布的问题归结为函数 $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, $z=x+\mathrm{i}y$ 的问题,$\zeta(z)$ 后人称为"黎曼 ζ 函数".他提出了至今仍未解决的问题"黎曼猜想":$\zeta(z)$ 位于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 之间的全部零点都在 $x=\frac{1}{2}$ 之上,即零点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部都是$\frac{1}{2}$.

黎曼在组合拓扑、代数几何、数学物理、微分方程等其他领域也有丰硕的成果.黎曼的工作直接影响了 19 世纪后半期的数学发展,许多杰出的数学家重新论证黎曼断言过的定理,在黎曼思想的影响下数学许多分支取得了辉煌成就.因此高斯说:"黎曼……具有创造性的、活跃的、真正数学家的头脑,具有灿烂丰富的创

造力."

2. 黎曼函数的定义与特征

在微积分中,有两个无法用解析法、列表法或图像法表示,只能用言语来描述的特殊函数,一个是狄利克雷函数,另一个就是黎曼函数.

黎曼函数的定义为:

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, x=\dfrac{m}{n}(|m|, n \text{为互质的正整数}),\\ 0,\ x \text{为} 0,1 \text{或无理数}.\end{cases}$$

黎曼函数是黎曼为了指出"可积函数不一定连续"而给出的函数.此函数是一个特殊函数,在微积分中有着重要应用,在很多情况下可以作为反例来验证某些函数方面的待证命题.

黎曼函数 $R(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,因不论 x 为任何实数都有 $R(x+1)=R(x)$,故对 $R(x)$ 通常只在$[0,1]$上讨论其性质. $R(x)$ 的值域是集合 $E=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$,其中 n 是大于等于 2 的正整数,其值域只有一个聚点是 0,它也是数列$\{\frac{1}{n}\}$的极限点.

黎曼函数 $R(x)$ 是区间$[0,1]$上的有界函数,其上确界是 1/2,下确界是 0;$R(x)$ 是偶函数;因在任何区间上都含有有理点和无理点,故 $R(x)$ 在任意区间上都不可能单调;$R(x)$ 是周期为 1 的周期函数.

黎曼函数 $R(x)$ 在任何点的极限均为 0,既有无穷多个连续点又有无穷多个不连续点(在无理点连续、在有理点不连续),处处不可导,此函数在区间$[0,1]$上可积且积分值等于 0.

四、高斯与取整函数

1. 数学王子 —— 高斯

高斯(Gauss,1777～1855年),德国著名数学家、物理学家、天

文学家、大地测量学家.高斯被认为是最重要的数学家,有数学王子的美誉,并被誉为历史上伟大的数学家之一,和阿基米德、牛顿、欧拉并列,同享盛名.



高斯出生于一个工匠家庭,幼时家境贫困,但聪敏异常,受一贵族资助才进学校受教育.高斯 3 岁时就发现父亲账簿上的一处错误,9 岁时就发现了 1 到 100 这些数加起来的规律.高斯的才华受到了布伦瑞克公爵卡尔·威廉(Karl Wilhelm)的赏识,亲自承担起对他的培养教育,15 岁把他送到布伦瑞克的卡罗林学院学习,在那里,高斯开始对高等数学作研究,独立发现了二项式定理的一般形式,发现了数论上的"质数分布定理",发现了数据拟合中最为有用的最小二乘法,提出了"算术几何平均",提出了概率论中的正态分布公式并用高斯曲线形象地予以说明.

1795 年高斯进入哥廷根大学,1796 年,19 岁的高斯得到了一个数学史上极重要的结果,就是《正十七边形尺规作图之理论与方法》,他对正多边形的欧几里德作图理论(只用圆规和没有刻度的直尺)做出了惊人的贡献,尤其是发现了作正十七边形的方法,这是一个有着二千多年历史的数学悬案.

22 岁高斯的博士论文可以说是数学史上的一块里程碑,他在论文中第一次严格证明了"每一个实系数或复系数的任意多项式方程存在实根或复根",即代数基本定理,从而开创了"存在性"证明的新时代,同年高斯获博士学位.

24 岁高斯写出《算术研究》,这部伟大的著作曾经寄到法国科学院而被拒绝,但高斯自己把它出版了,《算术研究》开创了现代数论的新纪元;关于《算术研究》,还流传着这样一个故事:1849 年 7 月 16 日,哥廷根大学举行五十周年庆祝会.当进行到某一程序

时，高斯准备用《算术研究》的一张原稿点烟，当时在场的数学家狄利克雷（后来继承了高斯的职位），像见到渎圣行为一样吃了一惊，他立刻冒失地从高斯手中抢下这一页纸，并一生珍藏它；高斯暮年谈到这部巨著时说："《算术研究》是历史的财富."可见是他的得意之作. 25 岁当选圣彼德堡科学院外籍院士，30 岁被聘为哥廷根大学数学和天文学教授，并担任该校天文台的台长.

高斯的成就遍及数学的各个领域，在数论、非欧几何、微分几何、超几何级数、复变函数论以及椭圆函数论等方面均有开创性贡献.

他是第一个成功地运用复数和复平面几何的数学家；他的《一般曲面论》是近代微分几何的开端；他是第一个领悟到存在非欧几何的数学家；他引入高斯级数，对级数的收敛性第一次进行系统的研究，开创了关于级数收敛性研究的新时代，使微积分走向了严格化的道路；在《高等数学》中以他的名字命名的有：高斯函数、高斯公式、高斯级数、高斯积分、高斯曲率、高斯分布、高斯方程、高斯曲线、高斯平面、高斯记号等等. 拉普拉斯认为："高斯是世界上最伟大的数学家."

高斯不仅是数学家，还是那个时代最伟大的物理学家和天文学家之一. 在 1801 年的元旦，一位意大利天文学家在西西里岛观察到在白羊座附近有光度八等的星移动，这颗现在被称作谷神星的小行星在天空出现了 41 天，扫过八度角之后，就在太阳的光芒下没了踪影. 当时天文学家无法确定这颗新星是彗星还是行星，这个问题很快成了学术界关注的焦点，甚至成了哲学问题. 黑格尔就曾写文章嘲讽天文学家说，不必那么热衷去找寻第八颗行星，他认为用他的逻辑方法可以证明太阳系的行星，不多不少正好是七颗. 高斯也对这颗星着了迷，他利用天文学家提供的观测资料，不慌不忙地算出了它的轨迹. 不管黑格尔有多么不高兴，几个月以后，这颗最早发现迄今仍是最大的小行星准时出现在高斯指定的位置

上.自那以后,小行星、大行星(海王星和冥王星)接二连三地被发现了.

在物理学方面高斯最引人瞩目的成就是在1833年和物理学家韦伯一起发明了有线电报,这使高斯的声望超出了学术圈而进入公众社会.除此以外,高斯在力学、测地学、水工学、电动学、磁学和光学等方面均有杰出的贡献.爱因斯坦曾评论说:"高斯对于近代物理学的发展,尤其是对于相对论的数学基础所作的贡献(指曲面论),其重要性是超越一切,无与伦比的."

高斯始终没有忘记布伦瑞克公爵的恩情,他一直对他的赞助人在1806年惨死在拿破仑手下这件事耿耿于怀,因而拒不接受法国大革命的信条和由此引发的民主思潮的影响,他的学生都称他为保守派.高斯一生谨慎保守,特别是对科学研究,他希望留下的都是十全十美的艺术珍品,高斯对于严密性的要求也非常苛刻,使得一个定理从直觉的形式到完整的数学证明,中间有一段很长的过程.此外,高斯十分讲究组织结构,他希望在每一个领域中,都能树立起一致而普遍的理论,从而将不同的定理联系起来.鉴于上述原因,高斯很不乐意公开发表他的东西.他的著名的警句是:"宁肯少些,但要成熟".为此,高斯付出了高昂的代价,包括把非欧几何学和最小二乘法的发明权让给了罗巴切夫斯基、鲍耶和勒让德,就如同费马把解析几何和微积分的发明权让给了笛卡儿和牛顿、莱布尼兹.他一生发表了150多篇论文,但仍有大量发现没有公之于世,比如,高斯从做出有关正多边形发现的那天起,就开始了著名的数学日记,他以密码式的文字记载下许多伟大的数学发现,高斯的这本日记直到1898年才被找到.

在高斯的时代,几乎找不到什么人能够分享他的想法或向他提供新的观念.每当他发现新的理论时,他没有人可以讨论.这种孤独的感觉,经年累月积存下来,造成了他高高在上、冷若冰霜的心境.这种智慧上的孤独,在历史上只有很少几个伟人感受过.高

斯从不参加公开争论，他对辩论一向深恶痛绝，他认为那很容易演变成愚蠢的喊叫，这或许是他从小对粗暴专制的父亲一种心理上的反抗. 高斯成名后很少离开过哥廷根，他曾多次拒绝柏林、圣彼德堡等地科学院的邀请. 高斯甚至厌恶教学，也不热衷于培养和发现年轻人，自然就谈不上创立什么学派，这主要是由于高斯天赋太高，因而心灵上离群索居. 可这不等于说高斯没有出类拔萃的学生，黎曼、狄利克雷都堪称伟大的数学家，戴特金和艾森斯坦也对数学作出了杰出贡献. 但是由于高斯的登峰造极，在这几个人中，也只有黎曼(在狄利克雷死后继承了高斯的职位) 被认为和高斯比较亲近.

和高斯同时代的伟大数学家雅可比和阿贝尔都抱怨高斯漠视了他们的成就. 雅可比是个很有思想的人，他有一句流传至今的名言："科学的唯一目的是为人类的精神增光". 他是狄利克雷的丈人，但他一直没能和高斯攀上亲密的友情. 在 1849 年哥廷根大学举行五十周年庆祝会上，从柏林赶来的雅可比坐在高斯身旁的荣誉席上，当他想找话题谈数学时，高斯不予理睬，在其他场合也是一样.

阿贝尔的命运很惨，他是一个伟大的天才，却过着贫穷的生活. 阿贝尔 20 岁时，解决了数学史上的一个大问题，即证明了用根式解一般五次方程的不可能性，他将短短六页"不可解" 的证明寄给欧洲一些著名的数学家，高斯自然也收到了一份. 阿贝尔在引言中满怀信心，以为数学家们会亲切地接受这篇论文. 不久，乡村牧师的儿子阿贝尔开始了他一生唯一的一次远足，当时他想以这篇文章作敲门砖. 阿贝尔此行最大的愿望就是拜访高斯，但高斯高不可攀，只是将论文瞄了几行，便把它丢在一旁，仍然专心于自己的研究工作. 阿贝尔只得在从巴黎去往柏林的旅途中，以渐增的痛苦绕过哥廷根.

匈牙利青年数学家亚诺什・鲍耶，在试证第五公设时，用反证

法推出了一系列与人们的经验不相符合的结论，写出了题为“空间的绝对几何”的论文，寄给高斯，求助于高斯帮助他发表. 但高斯在给他的回信中写到：“我不能称赞你的工作，因为称赞你就等于称赞我自己，你所取得的结论，我在 30 年前就已获得，并且比你的还多，我不能帮你发表.”这对鲍耶的打击很大，精神上受到伤害，从此抛弃了数学研究，在数学史上留下了很大的遗憾.

阿贝尔曾这样评价高斯：“他像只狐狸，用尾巴抹平了在沙地上走过的脚印.”对于这些批评，高斯的回答是：“凡有自尊心的建筑师，在瑰丽的大厦建成之后，决不会把脚手架留在那里.”

2. 取整函数的定义与特征

函数 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，称为取整函数，也称为最大整数部分函数.

取整函数是公元 1800 年高斯引进的函数，他是在研究圆内整点问题时提出的，又称为高斯函数.

按照取整函数的定义，对任意实数 x，都有

$$x-1<[x]\leqslant x,\quad x=[x]+a(0\leqslant a<1)$$

取整函数是非常重要的数学概念，它的定义域是连续的区间，值域却是离散的数集，它关联着连续和离散两个方面，因而有其独特的性质和广泛的应用. 除了在微积分中经常看到取整函数的身影外，在离散数学中要用到取整函数，在计算机算法分析中也常常用到取整函数.

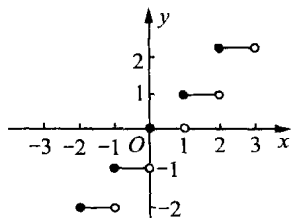


图 6-2

取整函数定义域为 R，值域为全体整数，它的图像很奇特，就像台阶，如图 6-2 所示.

取整函数在定义域上是无界函数，是递增函数（但不严格递增），是非奇非偶得函数，非周期函数.

取整函数在整点处无极限、不连续、不可导；在任何闭区间上可积.

3. 取整函数的一个应用——推算星期几

利用取整函数，我们可以推算出在公元 x 年第 y 天是星期几.

历法家已经为我们找到了这样的公式：

$$S = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4}\right] - \left[\frac{x-1}{100}\right] + \left[\frac{x-1}{400}\right] + y$$

这里变量 x 是公元的年数；变量 y 是从这一年的元旦，算到这一天为止(包含这一天) 的天数.

按上式求出 S 后，除以 7，如果恰能除尽，则这一天为星期日；否则余数为几，则为星期几！

如：我们共和国成立于 1949 年 10 月 1 日：问这一天是星期几？

因 $x = 1949, y = 274$

$$S = 1949 - 1 + \left[\frac{1949-1}{4}\right] - \left[\frac{1949-1}{100}\right] + \left[\frac{1949-1}{400}\right] + 274$$

$$= 1948 + 487 - 19 + 4 + 274 = 2694 \equiv 6 (\mathrm{mod} 7)$$

故 1949 年 10 月 1 日是星期六.

再如：公元 2000 年 1 月 1 日，21 世纪的第一天是星期几呢？

因 $x = 2000, y = 1$，代入公式可得出这一天为星期六.

第七章　极限概念与极限思想

极限概念是微积分中最基本的概念之一，整个微积分是以极限概念为基础的，微积分中的一系列重要概念，如函数的连续性、导数以及定积分等都是借助于极限来定义的. 如果要问：微积分是一门什么学科?那么可以概括地说：微积分就是用极限思想来研究函数的一门学科.

极限思想是近代数学的一种重要思想，所谓极限思想，是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学思想. 用极限思想解决问题的一般步骤可概括为：对于被考察的未知量，先设法构思一个与它有关的变量，确认这变量通过无限过程的结果就是所求的未知量；最后用极限计算来得到这结果.

本部分主要介绍极限概念发展的几个历史阶段、极限思想及其在微积分中的应用.

一、极限概念发展的几个历史阶段

极限是用以描述变量在一定变化过程中终极状态的概念，极限理论是微积分学的基础，它从方法论上突出地表现了微积分学不同于初等数学的特点. 从古至今，人们对于极限概念的认识经历了漫长(2000 多年)的过程.

1. 朴素、直观的极限观

这种极限观在我国古代的文献中就有记载，最著名的是《庄子·天下篇》中记载的一段话："一尺之棰，日取其半，万世不竭."后来刘徽的"割圆术"就是建立在直观基础上的一种原始的极限思想的应用.

古希腊数学家创立的"穷竭法"也是极限思想的应用，但由于他们对"无限的恐惧"，避免了明显地"取极限"，而是借助于间接证法 —— 归谬法来完成了有关的证明. 古希腊在极限方面的突出贡献是阿基米德的《抛物弓形求积》，它已形成了"微元法"思想的雏形. 到了 16 世纪，荷兰数学家斯泰文在考察三角形重心的过程中改进了古希腊人的穷竭法，他借助几何的直观，大胆地运用极限思想思考问题，放弃了归谬法的证明. 因此，他就在无意中"指出了把极限方法发展成为一个实用概念的方向".

2. 神秘的极限观

极限思想的进一步发展是与解析几何和微积分的建立紧密相联系的. 16 世纪的欧洲处于资本主义萌芽时期，生产力得到极大的发展，生产和技术中大量的问题，只用初等数学的方法已无法解决，要求数学突破只研究常量的传统范围，而提供能够用以描述和研究运动、变化过程的新工具，这是促进极限发展、建立微积分的社会背景. 在 17 世纪，解析几何的创立成为数学发展的转折点. 自然科学研究的中心转向自然界中的运动和变化. 数学中自然而然地引入了变量和函数的概念，牛顿和莱布尼兹创立了微积分. 在建立微积分的过程中，必然要涉及极限概念. 最初的极限概念是十分含糊不清的，并且在某些关键处常常不能自圆其说，如"无穷小一会儿是零，一会儿又不是零"等等. 这个时期的极限概念接近于"数列极限的描述定义". 正因为当时缺乏严格的极限定义，微积分理论受到了人们的怀疑与攻击，这就是数学史上所说的第二次数学危机 —— 无穷小悖论.

3. 严格的极限理论

为了克服无穷小带来的困难，在 18 至 19 世纪，数学家们提出了许多方案. 明确地将极限作为微积分基本概念的是法国数学家达朗贝尔，严格的极限理论是由柯西初建、维尔斯特拉斯完成的. 柯西把无穷小视为极限为零的变量，他引入“lim”来表示极限，维尔斯特拉斯提出了极限的精确定义，如数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义、函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义，定量地地刻划了两个“无限过程”之间的联系，这样的定义至今仍在高等数学书籍中使用.

二、极限思想及其在微积分中的应用

1. 极限思想及其思维功能

所谓极限思想，是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学思想. 用极限思想解决问题的一般步骤可概括为：对于被考察的未知量，先设法构思一个与它有关的变量，确认这变量通过无限过程的结果就是所求的未知量；最后用极限计算来得到这结果.

极限思想在现代数学乃至物理学等学科中有着广泛的应用，这是由它本身固有的思维功能所决定的. 极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系，是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用. 借助极限思想，人们可以从有限认识无限，从“不变”认识“变”，从直线形认识曲线形，从量变认识质变，从近似认识精确.

无限与有限有本质的不同，但二者又有联系，无限是有限的发展. 无限个数的和不是一般的代数和，把它定义为“部分和”的极限，就是借助于极限的思想方法，从有限来认识无限的.

“变”与“不变”反映了事物运动变化与相对静止两种不同状态，但它们在一定条件下又可相互转化，这种转化是“数学科学的有力杠杆之一”. 例如，要求变速直线运动的瞬时速度，用初等方法是无法解决的，困难在于速度是变量. 为此，人们先在小范围内用

匀速代替变速，并求其平均速度，把瞬时速度定义为平均速度的极限，就是借助于极限的思想方法，从“不变”来认识“变”的.

曲线形与直线形有着本质的差异，但在一定条件下也可相互转化，正如恩格斯所说：“直线和曲线在微分中终于等同起来了.”善于利用这种对立统一关系是处理数学问题的重要手段之一. 直线形的面积容易求得，求曲线形的面积问题用初等的方法是不能解决的. 刘徽用圆内接多边形逼近圆，一般地，人们用小矩形的面积来逼近曲边梯形的面积，都是借助于极限的思想方法，从直线形来认识曲线形的.

量变和质变既有区别又有联系，两者之间有着辩证的关系. 量变能引起质变，质和量的互变规律是辩证法的基本规律之一，在数学研究工作中起着重要作用. 对任何一个圆内接正多边形来说，当它边数加倍后，得到的还是内接正多边形，是量变而不是质变；但是，不断地让边数加倍，经过无限过程之后，多边形就“变”成圆，多边形面积便转化为圆面积. 这就是借助于极限的思想方法，从量变来认识质变的.

近似与精确是对立统一关系，两者在一定条件下也可相互转化，这种转化是数学应用于实际计算的重要诀窍. 前面所讲到的“部分和”、“平均速度”、“圆内接正多边形面积”，分别是相应的“无穷级数和”、“瞬时速度”、“圆面积”的近似值，取极限后就可得到相应的精确值. 这都是借助于极限的思想方法，从近似来认识精确的.

2. 极限思想在微积分中的应用

一方面，极限的思想方法贯穿于微积分课程的始终. 可以说微积分中的几乎所有的概念都离不开极限. 在几乎所有的微积分著作中，都是先介绍函数理论和极限的思想方法，然后利用极限的思想方法给出其他概念.

连续函数 —— 自变量的增量趋于零时，函数值的增量趋于零

的极限.

导数 —— 函数值的增量与自变量的增量之比,自变量的增量趋于零时的极限.

积分 —— 是当分割的细度趋于零时,积分和式的极限.

级数的敛散性 —— 级数的部分和数列是否有极限.

另一方面,极限思想方法是微积分乃至全部高等数学必不可少的一种重要方法,也是微积分与初等数学的本质区别之处.微积分之所以能解决许多初等数学无法解决的问题(例如求瞬时速度、曲线弧长、曲边形面积、曲面体体积等问题),正是由于它采用了极限的思想方法.

有时我们要确定某一个量,首先确定的不是这个量的本身而是它的近似值,而且所确定的近似值也不仅仅是一个而是一连串越来越准确的近似值;然后通过考察这一连串近似值的趋向,把那个量的准确值确定下来.这就是运用了极限的思想方法.

第八章　微积分中的重要概念

微积分的研究对象是函数，研究内容主要是以极限为主要思想和方法来研究函数的分析性质（连续性、可微性、可积性），涉及到的重要概念有连续、导数、微分、积分等，了解这些概念的产生与发展、本质与关系，对理解和掌握微积分具有重要的意义.

本部分主要介绍连续、微分、导数、积分概念的产生与发展过程，以及这些概念之间的相互关系.

一、连续

微积分的研究对象是函数，主要是连续函数. 因此对函数连续性的讨论是微积分的一个重要内容.

客观世界的许多现象和事物不仅是运动变化的，而且其运动变化的过程往往是连绵不断的. 这些连绵不断发展变化的事物在量的方面的反映就是连续函数，连续函数就是刻画变量连续变化的数学模型.

16～17 世纪微积分的酝酿和产生，直接开始于对物体的连续运动的研究. 像伽利略所研究的落体运动、开普勒所研究的绕日运转的行星所扫描的扇形面积、牛顿所研究的“流”等都是连续变化的量. 这个时期以及 18 世纪的数学家，虽然已经大张旗鼓地研究了连续变化的量，即连续函数，但仍停留在几何直观上，把能一笔

画成的曲线所对应的函数叫做连续函数.

连续的直观含义就是连绵不断的，所以一个函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个“连续函数”的直观意义就是它的图像是一条连绵不断的曲线.

若用函数值 $y=f(x)$ 随 x 的值的改变而变动的观点来说，就是当 x 逐渐改变时，函数 $y=f(x)$ 的相应变动也是逐渐的，不会有任何突增或突减的跳跃式振荡.

从数量上来说，逐渐的改变也就是逐步作微小的改变，所以当我们把函数的连续性局部化到 $x=a$ 的邻域来看时，$y=f(x)$ 在 $x=a$ 点连续的直观意义就是当 x 在 a 点的邻域内作微小变动时，$y=f(x)$ 的相应函数值也在 $f(a)$ 的邻域内作微小变动.

1817 年波尔察诺为了发表他的论文，需要一个精确的连续函数的定义，于是波尔察诺成为第一个开始对函数性质仔细研究的人，也是第一个用极限概念给出在某一区间连续恰当定义的人.

波尔察诺的连续定义为：

如果在某区间内任一 x 处，只要 $|\omega|$ 充分小，就能使 $|f(x+\omega)-f(x)|$ 任意小，则称 $f(x)$ 在该区间上连续.

这与定义函数连续性的现代方法($\varepsilon-\delta$ 语言)已非常相似.

直到 19 世纪，当柯西以及维尔斯特拉斯等数学家建立起来严格的极限理论之后，才对连续函数作出了纯数学的精确表述.

柯西把函数连续性的严密化提到了相当的高度，柯西给出的连续函数的定义为：

如果在两个界限之间(即某一区间)变量 x 的无穷小增量 α 总使函数 $f(x)$ 产生一个无穷小增量 $f(x+\alpha)-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在这两个界限之间连续.

维尔斯特拉斯给出了函数连续性的现代定义：

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

维尔斯特拉斯用 ε 和 δ 这种静态的有限量刻划了动态的无限量,这个 $\varepsilon-\delta$ 定义第一次使极限和连续性摆脱了与几何和运动的任何牵连,给出了只建立在数与函数概念上的清晰的定义,从而使一个模糊不清的动态描述,变成为一个严密叙述的静态观念,它既排除了无穷小这个有争议的概念,又消除了波尔察诺和柯西定义中的小于任意给定的量的说法的含糊性,它标志着微积分从动态化达到静态化,是对常量的否定之否定,是变量数学史上的一次重大创新.

今天"$\varepsilon-\delta$"语言的精髓已经深入到现代数学的每一根血管,牵动着每一根神经. 正因如此,希尔伯特认为:维尔斯特拉斯以其酷爱批判的精神和深邃的洞察力,为微积分建立了坚实的基础. 通过澄清一系列概念,他排除了在微积分中仍在出现的各种错误提法,扫清了关于无穷大、无穷小等各种混乱观念,决定性地克服了源于无穷大、无穷小朦胧思想的困难. …… 今天,分析学能达到这样和谐可靠和完美的程度 …… 本质上应归功于维尔斯特拉斯的科学活动.

在极限、无穷小和函数的连续性等概念得到澄清后,分析中一些重要的性质陆续登场. 维尔斯特拉斯在 1860 年应用 Bolzano 的"最小上界原理"证明了"聚点原则",在柏林的讲义中,维尔斯特拉斯证明了闭区间上连续函数的最值定理. 1870 年,Heine 定义了一致连续性,而后证明有界闭区间上连续函数一致连续.

二、导数与微分

导数与微分是微分学的重要概念,作为微分学基础的极限理论来说,早在公元前 3 世纪,古希腊和古代中国就已经产生,经过 16 ～ 19 世纪的漫长历程发展成为严格的理论.

在 17 世纪,由于两位杰出的数学家伽利略和开普勒的一系列

发现，导致了数学从古典数学向现代数学的转折，在 25 岁以前，伽利略就开始做了一系列实验，发现了许多有关物体在地球引力场运动的基本事实，开普勒在 1619 年前后归纳出著名的行星运动三定律，这些成就对后来的绝大部分的数学分支都产生了巨大影响．伽利略的发现导致了现代动力学的诞生，开普勒的发现则产生了现代天体力学．这些学科的发展都需要一种新的数学工具，这就是研究运动与变化过程的微积分．

微分学主要来源于对下列问题的研究：作曲线切线的问题，求物体运动的速度，求函数的最大、最小值的问题．这些问题在古希腊也曾考虑过．例如，在古希腊就能作出圆和圆锥曲线的切线，阿波罗尼斯在他的《圆锥曲线》一书中讨论过圆锥曲线的法线，把它当作从一点至曲线的最大和最小线段；在古希腊的著作中也可以找到对极大、极小问题的讨论．

从历史来看，导数是伴随微分的诞生而顺理成章地产生的，人们先有了微分的概念，随后才发现，对于处理微分问题来说，像 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 这么一种特定形式的极限，即导数，是一个有力的工具．

因为一方面从微分形式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 来看，在一点处的微分事实上都必须通过这一点的导数来表达和计算；另一方面，在比较复杂的情况下（比如高阶的微分和导数以及多元函数的微分和导数等），无论是形式地思考还是实际地处理问题，由导数入手都要比由微分入手更容易和简单一些，并且导数有它本身的意义，在数学的理论及其实际应用方面都扮演着重要的角色．因此才引入了导数概念 —— 这一处理微分问题的有力工具．

1. 微分概念

为求变量变化的极值以及曲线的切线等问题，导致了微分思想的产生．

古希腊以后，从一般意义上重新讨论曲线的切线问题由法国数学家罗贝瓦尔(Roberval,1602 — 1675) 提出的. 他认为，曲线是由运动的点生成的，点的运动又可以分解为两个已知的运动，两个已知的运动的速度向量的合成向量给出曲线的切线. 另一个作切线的方法是笛卡儿给出的，写在他的《几何学》一书的第二部分，但他的方法仅限于代数曲线，并且会遇到代数上的困难.

上面的方法有一定的局限性，不能用到一般的情形，也没有包含可能产生微分学的方法. 属于微分方法的先驱工作是 1629 年费马给出的. 开普勒已经观察到：一个函数的增量通常在函数的极大值或极小值处变得无限地小. 费马利用这一事实找到了求极大值和极小值的方法. 费马还创造了求曲线切线的方法.

曲线的切线问题和函数的极大、极小值问题都是微分学的基本问题. 正是两个问题的研究促进了微分学的诞生，费马在这两个问题上都作出了重要贡献.

费马处理这两个问题的方法是一致的，用现代语言来说，都是先取增量，而后让增量趋向于 0，而这正是微分学的实质所在，也正是这种方法不同于古典方法的实质所在.

费马在微分学这个领域内给出的一个统一的无穷小方法，用以解决求最大、最小值问题和作曲线的切线问题，他的研究为许多其他数学家所继续.

英国数学家巴罗(I. Barraow,1630 ~ 1677)，在这两类问题中间搭成了一座桥梁，巴罗最重要的著作是他的《光学和几何学讲义》，在这本书中求切线的方法，非常接近于现代微分学所采用的方法，并且我们能够找到非常接近近代微分过程的步骤，在本质上他已经用了今天我们所用的微分三角形的概念.

尽管巴罗的方法比费马的方法更接近于求导运算，但是还不能认为它已含有我们的符号 Δy 和 Δx，由于它们没有明确的极限概念，所以它们的论证在逻辑上缺乏严格性.

巴罗还作出了许多曲线的切线. 特别重要的是,巴罗在《光学和几何学讲义》的第十讲和第十一讲把作曲线的切线与曲线的求积联系了起来,这就是说,他把微分学和积分学的两个基本问题以几何对比形式联系了起来. 把这两个定理翻译成现代语言,并使用现代符号,则其内容可陈述如下:

如果 $y=\int_0^x z\mathrm{d}x$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z$;

如果 $z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则$\int_0^x z\mathrm{d}x=y$.

巴罗的确已经走到了微积分基本定理的大门口,但在巴罗的书中,这两个定理相隔二十余个别的定理,并且没有把它们对照起来,也几乎没有使用过它们. 这说明巴罗并没有从一般概念意义下理解它们.

在创建微积分的过程中究竟还有多少事情要做呢?

(1) 需要以一般形式建立新计算法的基本概念及其相互联系,创立一套一般的符号体系,建立计算的正规程序或算法;

(2) 为这门学科重建逻辑上一致的、严格的基础.

这第一个任务就是牛顿和莱布尼兹各自独立创造的微积分学所完成的工作,至于要在一个比较严格的基础上重建这个学科的基本概念,则要等到这个学科取得了广泛应用和蓬勃发展之后才可能,这是法国伟大的分析学家柯西及其他 19 世纪数学家的工作.

17 世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼兹分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作,虽然这只是十分初步的工作. 他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起:一个是切线问题(微分学的中心问题),一个是求积问题(积分学的中心问题). 牛顿和莱布尼兹建立微积分的出发点是直观的无穷小量,因此这门学科早期也

称为无穷小分析.牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑,莱布尼兹却是侧重于几何学来考虑的.

牛顿在 1671 年写了《流数法和无穷级数》,这本书直到 1736 年才出版,它在这本书里指出,变量是由点、线、面的连续运动产生的,否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合.他把连续变量叫做流动量,把这些流动量的导数叫做流数.牛顿在流数术中所提出的中心问题是:已知连续运动的路径,求给定时刻的速度(微分法);已知运动的速度求给定时间内经过的路程(积分法).

莱布尼兹在 1684 年,发表了现在世界上认为是最早的微积分文献《一种求极大极小和切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算》,这篇文章有着划时代的意义.其中含有微分的定义、现代的微分符号和基本微分法则.

18 世纪欧拉、柯西、维尔斯特拉斯等人将微分概念精确化,使得微分的现代形式最终完成.

2.微分思想

在微分学中有两个基本问题:变化率问题和增量问题.我们知道,函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的变化率是函数的导数 $f'(x)$,它是描述函数变化性态的一个局部概念.

有时我们需要计算函数 $y=f(x)$,当自变量在 x_0 处有一个微小改变量 Δx 时,函数改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的大小.

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 往往是 Δx 的一个较复杂的函数,要精确计算它是困难的,甚至是不可能的;并且我们在理论研究和实际应用中,往往只需要了解 Δy 的近似值就可以了.因而计算函数改变量 Δy 的近似值就显得特别重要.

人们把解决上述问题的出路放在将 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 线性化,用 Δx 的线性函数来近似代替它,这就是引入微分的基本想法.

具体过程如下:

设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在 x_0 处获得一增量 Δx 时，函数 y 也获得相应的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Δy 一般是 Δx 的一个较复杂的函数，记为 $\Delta y=g(\Delta x)$. 直接计算 Δy 往往很困难，于是希望用 Δx 的线性函数 $A\cdot\Delta x$(A 与 Δx 无关)来近似代替 Δy，使对 Δy 的计算得以简化. 同时，又要使产生的误差与 Δx 相比可以忽略不计. 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-A\cdot\Delta x}{\Delta x}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$\Delta y=g(\Delta x)$(Δy 是因变量，Δx 是自变量)一般是曲线，而 $\Delta y=A\cdot\Delta x$ 是直线，因此微分的基本思想就是以直代曲.

又由($*$)式成立，可得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-A\right)=0$，得 $A=f'(x_0)$，故 $\Delta y\approx A\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x$，亦即

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

上式左端函数表示的是曲线 $y=f(x)$，右端表示的是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线. 因此上面提到的以直代曲就是局部地以曲线的切线来代替该曲线，这就是微分的思想.

我们定义函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的微分为：

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

可见，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的微分有两个特点：

① 它是自变量增量 Δx 的线性函数，

② 它与函数增量之差：$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是比 Δx 更高阶的无穷小.

根据上述两个特点，当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，就可以用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似表示增量 Δy，即 $\Delta y\approx \mathrm{d}y$，当 $|\Delta x|$ 越小，其近似程度就越好. 这一近似等式是应用微分思想解决近似计算和误差估计等实

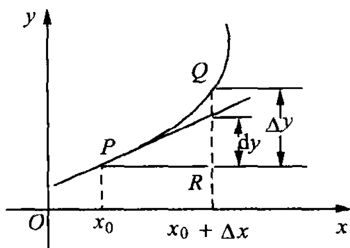


图 8-1

际问题的基础.

微分的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的微分等于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线纵坐标的增量，如图 8-1 所示.

3. 导数概念

17 世纪的两个问题，导致了导数概念的产生.

(1) 已知物体运动的路程与时间的关系，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，已知物体运动的加速度与速度，求物体在任意时刻的速度与路程.

解决这类问题的困难在于，17 世纪所涉及的速度和加速度每时每刻都在变化，计算平均速度可用运动的时间去除运动的距离；但对瞬时速度，运动的距离和时间都是 0，这就碰到了 $\frac{0}{0}$ 的问题. 这是人类第一次碰到这样的问题.

(2) 求曲线的切线. 这是一个纯几何的问题，但对于科学应用具有重大意义，例如在光学中，透镜的设计就用到曲线的切线和法线的知识，在运动中也遇到曲线的切线问题，运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向，是轨迹的切线方向.

解决这类问题的前提实际上是："切线"本身的意义是没有解决的问题. 对于圆锥曲线，把切线定义为和曲线只接触一点而且位于曲线一边的直线就足够了，这个定义古希腊人已经知道，但是对于 17 世纪所用的比较复杂的曲线，它就不适用了.

这两类问题都归结为变量变化的快慢程度，即变化率问题. 牛顿从第一个问题出发，莱布尼兹从第二个问题出发，分别给出了导数的概念.

(1) 求变速运动的瞬时速度

通常人们所说的物体的运动速度，是指物体在一段时间内的平均速度. 例如：一汽车从甲地出发到达乙地，全程 120 公里，行驶 4 小时，则汽车行驶的平均速度是 30 公里 / 小时. 事实上，汽车并

不是每时每刻都以 30 公里每小时的速度行驶，这是因为，下坡时会跑得快些，上坡时会跑得慢些，也可能中途停车等等，即汽车每时每刻的速度是变化的. 一般来说平均速度并不能反映汽车在某一时刻的瞬时速度. 随着科学技术的发展，我们仅仅知道物体运动的平均速度是不够的，还要知道物体在某一时刻的瞬时速度. 例如：研究子弹头的穿透能力必须知道弹头接触目标的瞬时速度.

下面我们来讨论瞬时速度的计算方法：

问题：设物体作非匀速运动，其运动规律(函数)是 $s = f(t)$，其中 t 是时间，s 是距离，讨论物体在 $t = t_0$ 时的瞬时速度.

解决方法：要求的瞬时速度是一个未知量，但它并不是一个孤立的概念，它与某些已知的概念联系着，有关系的是物体运动的平均速度.

在 t_0 处给自变量一个改变量 $\Delta t \neq 0$，物体在 Δt 这一段时间内所经过的路程为：

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

物体在 Δt 这一段时间内的平均速度为：

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

当 Δt 变化时，平均速度 $\bar{v}$ 也随着发生变化；当 Δt 较小时，平均速度 $\bar{v}$ 是物体在时刻 t_0 处"瞬时速度"的近似值，当 Δt 越小其近似程度就越好. 于是，物体在时刻 t_0 的瞬时速度就是当 Δt 无限趋近于 $0(\Delta t \neq 0)$ 时，平均速度 $\bar{v}$ 的极限. 即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

上式既是瞬时速度的定义，也给出了计算瞬时速度的方法.

(2) 求曲线上一点处的切线斜率

问题：设有一条平面曲线如图 8-2 所示，它的方程是 $y = f(x)$，求过该曲线上一点 $M(x_0, y_0)(y_0 = f(x_0))$ 处的切线斜率.

解决方法：要求的切线斜率是一个未知量，但它并不是一个孤立的概念，它与已知的割线有着密切的关系.

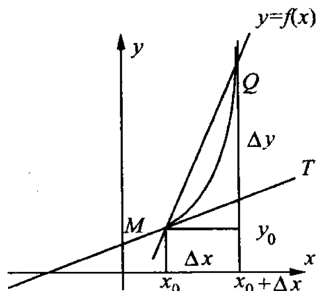


图 8-2

为了揭示这一关系，在此平面曲线上另外任取一点 Q，设它的坐标是 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，其中 $\Delta x \neq 0$，$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

由解析几何的知识：过曲线 $y=f(x)$ 上两点 $M(x_0,y_0)$，$Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 的割线斜率为 $k' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，当 Δx 变化时，点 Q 在曲线上变动，割线 MQ 的斜率 k' 也在变化. 当 Δx 越来越小时，点 Q 沿曲线逐渐趋近于点 M，割线 MQ 逐渐趋近于过点 M 的切线 MT.

于是，当 $\Delta x \to 0$ 时，点 $Q \to M$，割线 MQ 极限位置就是过点 M 的切线 MT，同时 MQ 的斜率 k' 的极限就是切线 MT 的斜率. 即

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

上式给出了切线的定义，也给出了计算切线斜率的方法.

上述两个问题的实际意义完全不同，一个是物理学中的瞬时速度，一个是几何学中的切线斜率. 但从数量关系来看，它们有着完全相同的数学结构 —— 函数的改变量与自变量改变量之比的极限，可归为同一类数学运算. 即：

如果用函数 $y=f(x)$ 来表示某一现象的变化规律，则这一类型的数学运算是：

① 在 x_0 给自变量一个改变量 $\Delta x \neq 0$，得到相应函数的改变量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

② 写出比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

③ 求出极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

导数的定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，在 x_0 处自变量 x 的改变量是 $\Delta x\neq 0$，相应的函数的改变量是 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导(或存在)，此极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数(或微商). 记作：$f'(x_0)$ 或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

4. 连续、导数、微分的关系

(1) 连续性和可微性的关系

连续性和可微性是微积分的基本概念. 在今天，对一个学过高等数学的学生来说，认为连续函数一定是可微的，都是不可原谅的，然而犯错误的人都是当时的伟人：欧拉、拉格朗日、柯西、高斯等. 和柯西同时代的几乎所有数学家都确信连续函数一定是可微的.

最早明确区别连续性和可微性的例子，出现在德国大数学家黎曼 1854 年的论文中.

波尔察诺 1824 年觉察到了连续函数和可微性的区别. 最早明确地以几何形式(1830 年) 给出了区别连续性和可微性的例子，但没有发表.

1872 年维尔斯特拉斯在柏林科学院的一次讲演中，通过一致收敛级数，用分析式给出了历史上第一个处处连续而处处不可微函数的经典例子：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}\cos(a^{x}\pi x)$$

其中 a 为奇整数,x 为实数,$0<b<1,ab>1+\frac{3}{2}\pi$.

连续性与可微性差异的重大发现,标志着人类对函数认识的进一步深化.人们开始注意到依靠几何直观的思维方法有时是靠不住的.

(2) 导数与微分的关系

导数与微分是微分学中的两个最基本的概念.它们之间既有联系又有区别:

一方面,可导与可微是等价的,若求出了函数在一点的导数,再乘以 $\mathrm{d}x$ 即得该点的微分;若求出了函数在一点的微分,再除以 $\mathrm{d}x$ 即得该点的导数;因此导数又叫做微商.

另一方面,从它们的来源和结构来看,导数作为有确定结构的差商的极限,比微分的概念更为基础;但又由于一个导数可以表示为两个微分之商,因此在分析运算中,微分表现出更大的灵活性与适应性.

微分是研究函数的一个重要工具,因为研究函数的各种问题都会涉及到函数的增量,而微分是 Δx 的线性函数且微分代替增量的误差是一个比 Δx 更高阶的无穷小(或者说当 $\Delta x\to 0$ 时,微分 $\mathrm{d}y$ 与增量 Δy 是等价的无穷小).

三、积分

1. 积分概念的产生

在数学史上,积分概念先于微分概念产生,原因是积分学研究的问题是静态的,是在某些面积、体积和弧长相联系的求和过程中引出的.而微分学则是动态的,它涉及到运动、对曲线作切线问题和函数的极大值、极小值问题,只有在生产力发展到一定阶段时才

会产生；再往后人们才注意到：积分和微分彼此为逆运算而相互关联.

积分思想源远流长，可追溯到遥远的古希腊.那时就已经开始了面积、体积、弧长的计算和图形重心的定位.苏格拉底的同时代人、巧辩家安提丰(约公元前 500 年)是对圆的求积问题作出贡献的第一人，安提丰在研究化圆为方时，提出一种将圆内接正多边形边数不断加倍逼近圆周的方法：

"随着一个圆的内接正多边形的边数逐次成倍增加，圆与多边形面积的差将被穷竭."

后人认为这是穷竭法的最早形式.但穷竭法通常以欧多克索斯命名，欧多克索斯(Eudoxus，公元前 400 ～ 公元前 350)是古希腊柏拉图时代最伟大的数学家和天文学家，他假定量是无限可分的.

欧多克索斯建立了"欧多克索斯原理"：

"设给定两个不相等的量，如果从其中较大的量减去比它的一半大的量，再从所余的量中减去比这余量的一半大的量，继续重复这一过程，必有某个余量将小于给定的较小的量."

欧多克索斯利用这一原理建立了完善的穷竭法，证明了棱锥体积是同底同高的棱柱体积的三分之一，以及圆锥体积是同底同高的圆柱体积的三分之一，但他没有明确的极限思想.

穷竭法被欧几里得收入《几何原本》中，成为几何证明的一种方法.阿基米德对穷竭法作出了最巧妙的应用.

真正成为积分学萌芽的当推阿基米德，(Arehimedes，公元前 287 ～ 公元前 212)的工作.

在阿基米德时代，圆柱的体积和圆锥的体积比较好求，但求球的体积要困难得多.在《论球和柱体》一书中，阿基米德借助圆柱和圆锥的体积，第一次给出现了球和球冠的表面积、球和球缺的体积的正确公式，他指出：如果圆柱的底等于球的大圆，圆柱的高等

于球的直径，则球的表面积恰好等于圆柱的总面积（包括侧面积和两底的面积）的2/3，圆柱的体积恰好等于球的体积的3/2.由此不难得出我们熟知的公式：

$$S = 4\pi r^2,\ V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

其中S和V分别表示半径为r的球的表面积和体积.

阿基米德求球体积的方法，后人称之为"阿基米德平衡法"，他把一个量看成由大量的微元所组成，这与现代的积分法实质上是相同的.

阿基米德还在他的《抛物弓形求积》中用穷竭法求出了抛物线弓形的面积.

公元263年我国刘徽提出的割圆术，也是积分思想的雏形，并且用这些方法求出了不少几何形体的面积和体积；然而这些古代方法都建立在特殊的技巧之上，不具有一般性，也不是以严密的理论为基础的.

第一个试图阐明阿基米德方法，并将他的方法给予推广的是德国的天文学家和数学家开普勒(Kepler,1571～1630)，他在1615年的《酒桶的新立体几何》一书中包含用无穷小元素求面积和求体积的许多问题，开普勒在天文学研究中已得到(用现代符号表示的)公式：$\int_0^\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta = 1 - \cos\theta$.开普勒的方法被后人称为"同维无穷小方法".

开普勒工作的直接继承者是意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri,1598～1647)，1635年，卡瓦列里发表了《不可分素几何学》，他认为："要决定平面图形的大小可以用一系列平行线，我们设想在这些图形上划了无穷多平行线."他以同样的方式处理了立体，只是那里不是直线，而是平面.这些直线(或平面)就是不可分素.

卡瓦列里利用不可分素法解决了整数幂的幂函数的积分问题,用现代的语言说,他算出了积分$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

开普勒每次只能算具体的体积,没有形成一个一般的方法,卡瓦列里却得出了一般方法,后人称之为卡瓦列里原理:

(1) 如果两个平面片处于两条平行线之间,并且平行于这两条平行线的任何直线与这两个平面片相交,所截二线段长度相等,则这两个平面片的面积相等.

(2) 如果两个立体处于两个平行平面之间,并且平行于这两个平面的任何平面与这两个立体相交,所得二截面面积相等,则这两个立体的体积相等.

卡瓦列里原理是计算面积和体积的有用工具,它的基础很容易用现代的微积分严格化,承认这两个原理我们就能解决许多求积问题.卡瓦列里依靠这一理论,巧妙地求出若干曲边图形的面积,还证明了旋转体的表面积及体积公式等.

1637 年法国数学家费马给出一种求切线的方法,实质上与现代方法一致.费马还在文中得到了求最大值和最小值的方法,确立了多项式方程代表的曲线上的极大、极小和拐点.他还将这一方法用于求物体的重心、曲线的长度以及求旋转面的面积等各类问题.

英国数学家沃利斯(John Wallis,1616 ～ 1703) 在他的著作《无穷数量的算术》中把计算联系到自然数的方幂和的问题,在他的著作中明白地提出了极限过程.

更接近于定积分的现代理解法的是法国数学家、物理学家和哲学家帕斯卡(Blaisc Pascal,1623 ～ 1662),他计算了种种面积、体积、弧长,并解决了求重心位置等一系列问题.

1670 年,英国数学家巴罗应用几何方法对曲线进行计算,在求切线时提出了"微分三角形"概念.巴罗还使用了与费马同样的

方法求曲线的切线，并且可能是第一个认识到微分法是积分法的逆运算的数学家.

17 世纪中后期，微积分的大量知识积累起来. 但这些知识往往沉湎于细节，而且多用几何方法寻求严密的推理，忽略了新发展的解析几何. 最终完成微积分创立工作的是两位著名的思想家：英国的牛顿和德国的莱布尼兹.

牛顿于1665年11月发明正流数术（微分法），1666年5月建立反流数术（积分法），1666年10月写出第一篇微积分论文《流数简述》，其中以速度形式引进了流数，使用了无穷小瞬概念，建立了"微积分基本定理"，并讨论了正、反微分运算的各种应用. 1687年，牛顿的《自然哲学之数学原理》在伦敦出版，第一次公开表述了他的微积分方法.

莱布尼兹1673年他阐述了特征三角形（即微分三角形）思想，并通过积分变换，得到平面曲线的面积公式. 1675年10月，他使用了不定积分符号，用不定积分表示面积，还得到分部积分公式. 1675 ～ 1676 年他得到微积分基本定理，这一思想在牛顿 1666 年的手稿中已有，后来被称为"牛顿－莱布尼兹公式". 1677 年他明确定义了 dy 为函数的微分，给出了 dy 的演算规则. 这些工作为他正式发表微积分论著奠定了基础. 1684 年，莱布尼兹发表第一篇微积分论文，一般简称为《一种求极大极小和切线的新方法》. 文中叙述了微分的基本原理，指出无限分割求和是微分的逆运算，广泛使用了 dx，dy 符号，还给出函数乘积的微分法则，以及求幂函数的微分法则等. 此外，文章还给出微分法在求切线、求最大最小值和求拐点等方面的应用.

定积分的定义：设 $f(x)$ 是定义在区间$[a,b]$上的有界函数，用点 $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ 将区间$[a,b]$任意分成 n 个子区间$[x_{i-1},x_i](i = 1,2,\cdots,n)$，这些子区间及其长度均记作 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i = 1,2,\cdots,n)$. 在每个子区间

Δx_i 上任取一点 ξ_i，作 n 个乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

如果当最大的子区间的长度 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时，和式 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在，并且其极限值与$[a,b]$的分法及 ξ_i 的取法无关，则称 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积，此极限值称为 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分，记作

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 定积分概念的实质

(1) 定积分是一种新型的极限

定积分是一种特殊的极限，这种极限不同于数列的极限也不同于函数的极限. 它是一种复杂的和式的极限，对于体现自变过程的变量 λ 的每一个值，不仅区间$[a,b]$的分法有无穷多种，而且对于每一个分法，介点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 也有无穷多种取法，因而相应的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 一般有无穷多个值. 但它仍然有着与数列极限、函数极限的本质上的相同之处，即当 λ 无限变小时，相应的一切和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 与某一定数 I 的距离：$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|$ 能够变得并保持任意的小.

在定积分的定义中，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限是指在积分区间$[a,b]$无限细分情形下的极限，$\lambda \to 0$ 是指$\{\Delta x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$中的最大值趋于 0，正是表达了对积分区间$[a,b]$无限细分. 当然，当积分区间$[a,b]$无限细分时，小区间的个数 n 一定无限增加，即 $n \to \infty$；但反之，当小区间的个数 n 无限增加，即 $n \to \infty$ 时，并不能保

证积分区间$[a,b]$无限细分.

(2) 定积分是定义函数的一种新工具

我们知道连续函数$f(x)$的变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的一个原函数,又知道某些函数的原函数并不是初等函数.如椭圆积分$s(t)=\int_0^t \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$就不是初等函数,这时我们就把这个积分本身,作为此函数的定义,以此为出发点来研究函数.有时,积分本身是我们熟悉的函数也可以这样做,这既开阔了思路,又增加了函数的一种等价定义,如我们可以把函数$F(x)=\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}(x>0)$作为对数函数$y=\ln x$的定义等.

(3) 定积分既是一个基本概念,又是一种基本思想.

定积分的思想即"化整为零 → 近似代替 → 积零为整 → 取极限".定积分这种"和的极限"的思想,在高等数学、物理、工程技术、其他的知识领域以及人们在生产实践活动中具有普遍的意义,很多问题的数学结构与定积分中求"和的极限"的数学结构是一样的.人们通过对曲边梯形的面积、变速直线运动的路程等实际问题的研究,运用极限方法,分割整体、局部线性化、以直代曲、化有限为无限、变连续为离散等过程,使定积分的概念逐步发展建立起来.可以说,定积分最重要的功能是为我们研究某些问题提供一种思想方法(或思维模式),即用无限的过程处理有限的问题,用离散的过程逼近连续,以直代曲,局部线性化等.定积分的概念及微积分基本公式,不仅是数学史上,而且是科学思想史上的重要里程碑.定积分思想,是人类智慧的可贵结晶,已成为人类文明中的瑰宝.

3.不定积分与定积分的比较

从定义的泛指而言,一个定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$的不定积分是其原函数的一般表达式,而$f(x)$在$[a,b]$上的定积分是黎

曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

不定积分与定积分是完全不同的两个概念，函数在所讨论区间上的黎曼和的极限的存在性不取决于该函数的不定积分的存在性，函数在所讨论区间上的不定积分的存在性也不取决于该函数的黎曼和的极限的存在性.

具体情况如下：

(1) 函数可积不一定该函数存在原函数.

(2) 函数有原函数但该函数不一定可积.

(3) 不定积分与定积分可以相互转化.

(4) 函数的连续性不是该函数存在原函数的必要条件.

4. 定积分的存在性

在对定积分思想的理解中，还有两个问题值得考虑：可积的函数应当满足什么条件?满足什么条件下的函数一定可积?即什么函数不可积?什么函数可积?

下面几个结论回答了这样的问题：

(1) 可积函数必有界，有界函数不一定可积，无界函数一定不可积.

(2) 区间$[a,b]$上的连续函数一定可积.

(3) 区间$[a,b]$上的有有限个间断点的有界函数一定可积.

(4) 区间$[a,b]$上的单调函数一定可积.

5. 微积分四个基本概念的关系

导数、微分、不定积分、定积分是微积分中的四个最基本的概念，它们之间有着紧密的联系.

一方面，在定义了导数后，利用导数来定义微分、不定积分，这三个概念之间的关系自不待言.

另一方面，从定积分的定义不能直接看出定积分与另外三个概念之间的联系，微积分基本定理与牛顿 — 莱布尼兹公式在理论

上的重要作用,就是揭示了定积分与另外三个概念之间的联系.牛顿—莱布尼兹公式告诉我们,不定积分是为定积分服务的,是为了解决定积分计算的关键步骤—寻找被积函数的原函数—建立的一整套方法,这就是定积分与不定积分的关系.微积分基本定理表明,(变上限的)积分与微分是互逆运算.这样,微积分四个基本概念之间的关系,便由此完全得到了沟通,而微积分基本定理与牛顿—莱布尼兹公式,恰好在微分与积分之间起了桥梁作用,使微分学与积分学形成一个有机的整体.

第九章　微积分中的重要常数 π

圆周率的计算与微积分的发明是密不可分的，微积分为精确计算圆周率提供了分析工具，圆周率也频频出现在微积分的许多公式、定理中，成为微积分中的一个重要的常数.

本部分主要介绍圆周率的名称、圆周率的符号与性质、圆周率的计算、蒲丰投针求 π、圆周率的记忆.

从有文字记载的历史开始，圆周率就引进了外行人和学者们的兴趣. 作为一个非常重要的常数，圆周率最早是出于解决有关圆的计算问题. 求出它的尽量准确的近似值是几千年来作为数学家们的奋斗目标，人类对 π 的认识过程，反映了数学和计算技术发展情形的一个侧面，对 π 的研究，在一定程度上反映这个地区或时代的数学水平. 直到 19 世纪初，求圆周率的值应该说是数学中的头号难题.

轮子的设计和研制一定会涉及圆周与圆直径的比值，这应该是圆周率研究的缘起之一，圆周长度对其直径长度的比例，对任何圆都相同，这个比例称为圆周率.

圆周率在数学上有着特殊的地位和作用，求圆周长、圆面积、球体积等类问题，都要接触到圆周率的取值.

在初等数学中，由于 π 的引入，三角函数中的自变量由角度这

一几何量转化为实数；在高等数学中，用幂级数表示三角函数，使它们脱离几何的定义，有了坚实的分析基础. 把满足一定条件的函数展开为三角级数，消除了初等函数与分段函数之间的界限，融合成一类无穷多项表达式.

数学上最著名的公式之一 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 起源于欧拉，当 $x=\pi$ 时为 $e^{i\pi}+1=0$，这个关系式联系着数学中最重要的五个数：表示坐标原点的 0 和表示实单位的 1（来自算术）、表示虚单位的 i（来自代数）、高等数学中最重要的两个无理数 π（来自几何）和 e（来自分析学），使数学中最著名的“五朵金花”妙不可言地同时绽开，两个最著名的超越数结伴而行，实数和虚数熔于一炉；当 $x=2\pi$ 时为 $e^{2i\pi}-1=0$，这个关系式联系着数学中最重要的六个数：0、1、2、i、π、e，使得数学中最著名的“六大明星”同台献艺. 它们如此自然、和谐、简单地同处于一个公式之中，真是数学乃至科学中的最美妙绝伦的公式之一.

一、圆周率的名称

现代人称 π 为“圆周率”，但历史上世界各国却给它取了许多“绰号”. 人类最早使用的粗糙圆周率是 3，这个值被后人称为“古率”. 在古代中国、巴比伦、印度等文明古国长期使用 3 作为圆周率的值，在我国的《周髀算经》里已有“周三径一”的记载，在《九章算术注》中刘徽把圆周率称为“周三径一之率”，在一些文献中也被称作“径一周三之率”，因此“周三径一之率”、“径一周三之率”又是古率的另外名称.

直正使圆周率计算建立在科学基础上的是阿基米德，他率先将圆周率的值算到两位小数 3.14. 为纪念他的这一伟大贡献，后人将 3.14 叫做“阿基米德数”或“阿氏率”. 阿基米德专门写了一篇论文《圆的度量》，用几何方法证明了圆周率小于 22/7 而大于 223/71. 这是第一次在科学中创用上、下界来确定近似值.

古希腊天文学家、数学家托勒密在制作弦表时得到的圆周率值为 3.1416，后人称为“托勒密之值”.

我国魏晋时代数学家刘徽用他独创的“割圆术”，将圆周率值计算到小数点后 4 位，即 3.1416，称为“徽率”. 在刘徽以后 200 多年，印度数学家阿利亚巴塔也求出了圆周率为 3.1416，所以有人也把 3.1416 称为“阿利亚巴塔之值”.

我国南北朝时代（约公元 460 年）的数学家祖冲之在他的名著《缀术》给出了圆周率小点后第七位值 3.1415926，这个具有七位小数的圆周率在当时是世界首次，后人称为“祖率”. 祖冲之还找到了两个分数：22/7（约率或疏率）和 355/113（密率），用分数来代替圆周率，极大地简化了计算，这种思想比西方要早一千多年. 祖冲之确定的两个形式的 π 值，355/113（$\approx$ 3.1415926）和 22/7（$\approx$ 3.14）是分子分母在 1000 以内最接近 π 值的分数. 祖冲之的这一研究成果享有世界声誉：巴黎“发现宫”科学博物馆的墙壁上著文介绍了祖冲之求得的圆周率，莫斯科大学礼堂的走廊上镶嵌有祖冲之的大理石塑像，月球上有以祖冲之命名的环形山.



祖冲之的圆周率，保持了一千多年的世界记录，直到 1596 年，荷兰数学家卢道夫把 π 值推到小数点后第 15 位小数，最后推到第 35 位，为了纪念他这项成就，人们在他 1610 年去世后的墓碑上，刻上 3.14159265358979323846264338327950288 这个数，从此人们也把它称为“卢道夫数”.

二、圆周率的符号与性质

在所有的数学符号中，最神秘、浪漫，被人误解最深，却最吸引人的符号，也许就是 π 了.

有史以来圆周率的第一个符号是 π/δ，1647 年英国数学家

奥特雷德在出版的《数学指南》一书中，首创用 π/δ 来表示圆周率. 其中 π 是希腊文中 —— 圆周“περιφερεια”的第一个字母，δ 是直径“διαμετρον”的第一个字母，这是后人用 π 表示圆周率的先导.

德国数学家斯图姆，在1689年用用一个字母e来表示圆周率. 不过，e在后来却用于表示自然对数的底，直到现在.

在求圆周率值的过程中，人们常用直径为1的圆，这样 π/δ 就变成了 π. 英国数学家琼斯在1706年出版的《新数学引论》中，首次创用 π 代表圆周率. 但他的符号并未立刻被采用.

瑞士数学家伯努利曾用c表示过圆周率，欧拉曾用c，p表示过圆周率，后来欧拉、哥德巴赫等人积极倡导用符号 π 表示圆周率. 1748年后，用 π 表示圆周率被人们接受、采纳、欢迎并确定下来. 现在 π 已成为圆周率的专用符号.

所谓 π 的性质，指 π 是一个什么样的数：是常数还是变量？是有理数还是无理数？是代数数还是超越数？

π 是常数的认识：人们在生活和生产实践中认识到 π 是常数. 例如古希腊《几何原本》中就提到 π 是常数，我国公元前的《墨子》中有“小圆之圆与大圆之圆同”的记载，《周髀算经》、《九章算术》中也认为 π 是一个常数. 巴比伦、埃及、印度、日本的史料中也是类似的记载.

π 是无理数的认识：约1300年，中国元代数学家赵友钦，用割圆术求 π 时指出：“若节节求之，虽至千万次，其数终不穷.”说明他对 π 的性质的认识，实际上已接近无理数的边缘了. 苏格兰数学家格雷果里是第一位证明 π 是无理数的人，不过他的证明并不严密. 法国数学家德·拉尼在17世纪末对 π 的无理性作出过推断，这一推断在半个多世纪以后，由德国数学家兰伯特证明，但兰伯特的证明也不严格. 1794年法国数学家勒让德在巴黎出版了《初等几何》一书，此书对兰伯特的不严格证明予以补证，从而给出了 π 是无理

数的严格证明.

π 是超越数的认识:1794 年勒让德在《初等几何》书中写道:"很有可能数 π 不能包含在代数的无理数中,亦即它不能是其系数全部为有理数的有限项的代数方程的根."这是 π 为超越数的最早猜测. 1873 年法国数学家埃尔米特证明了自然对数的底 e 是超越数,引起了巨大反响,也炒热了证明 π 是超越数的话题. 有人曾要埃尔米特继续研究这个问题,但他没敢尝试,说:"我可不想自找麻烦,如果有人要去尝试,我衷心祝愿他们成功. 但先要声明一下,他们一定会吃尽苦头的."德国数学家林德曼是"想吃尽苦头的人",他度过"苦海"获得了成功. 林德曼关于 π 是超越数的证明非常冗长,即使要对它进行简化表达,也依然十分困难. 三年以后的 1885 年,林德曼的证明被维尔斯特拉斯化简,1893 年又被希尔伯特化得更简,最后德国数学家果尔丹和美国数学家霍尔维兹在 1893 年化为初等证明.

三、圆周率的计算

π 值的计算,大概是在古代数学的范畴中,唯一仍能让现代数学家苦心钻研的问题. π 值的计算经历了通过实验方法进行估算、通过几何方法进行科学计算、通过分析方法进行公式计算、通过计算机方法进行程序计算等历程,也出现过用蒲丰投针方法计算 π、用两个随意写出的数中互素概率的方法计算 π、用夜空中亮星的分布来计算 π 等趣味方法.

通过实验方法近似估算 π 值是计算 π 的古老方法. 这种对 π 值的估算基本上都是以观察或实验为根据,是基于对一个圆的周长和直径的实际测量而得出的;也使用过把谷粒撒在一个圆和它的外切正方形上,通过数圆内谷粒数与正方形内谷粒数对比的方法估算 π 值;或用匀重木板锯成圆形和方形以秤量对比取值的方法估算 π 值.

通过几何方法科学计算 π 值是阿基米德创立的. 阿基米德是割圆术的开山鼻祖,他用内接与外切正多边形逼近圆求 π,算到 96 边形将 π 的值算到两位小数 3.14,并给出了 π 小于 22/7 而大于 223/71 的误差估计.

刘徽发明了一种不同于阿基米德的割圆术 —— 徽术,用圆内接正多边形逼近圆求 π,他将割到 192 边形的几个粗糙的近似值通过简单的加权平均,获得了具有 4 位有效数字的圆周率 $\pi = 3927/1250 = 3.1416$(如果按照阿基米德的割圆术得到该值,需要割到 3072 边形).

公元 464 年,祖冲之在前人成就的基础上,得出精确到小数点后第六位的 π 值,并确定约率与密率两个形式的 π 值.

17 世纪初,德国人鲁道夫用了几乎一生的时间用割 2^{62} 边形的方法算出小数点后第 35 位的 π 值,创造了用几何方法(古典方法)求 π 值的最高记录.

通过分析方法(级数法)进行公式计算 π 值的首创者是苏格兰数学家詹姆斯·格雷果里.

1671 年格雷哥里发表了级数式 $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ 但当时他并没意识到他已经为计算 π 开辟了一个新的时代.

1673 年,德国数学家莱布尼兹将 1 代入 x 得 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ 但要算 500000 项之后,才能得到 π 的 30 位准确值.

1699 年,英国数学家夏普将 $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 代入 x 得到 72 位准确 π 值.

1706 年,英国数学家梅钦建立了一个重要的公式 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$,他算到小数后 100 位的准确 π 值.

19 世纪以后，类似的公式不断涌现，π 的位数也迅速增长. 1873 年英国数学家威廉·山克斯将 π 算到小数后 707 位. 1949 年美国数学家列维·史密斯和雷恩奇算出 1121 位 π 值，创造了人工算 π 值的最高记录.

通过计算机方法是通过选定计算 π 的公式，将它编入程序后输入计算机，再发出计算指令，最后打印出来.

1949 年，世界第一台计算机 ENIAC 根据梅钦公式计算到 π 的 2048 位小数(用了 70 小时).

1973 年，法国女数学家吉劳德等人，用 CDC——7600 型计算机花去 23 小时 18 分钟，计算到小数点后 1001250 位的 π 值，法国将它印成一本厚 200 页的书存留于世.

2001 年，日本的金田康正利用计算能力居世界第 26 位的计算机并使用新的计算方法，耗时 400 多个小时，计算出圆周率小数点后 1002411 亿位数. 利用超级计算机计算 π 值的工作现在仍然有人在做.

四、蒲丰投针求 π

1777 年的一天，一位法国人家里高朋满座. 他们不仅是来赴宴的，而且是来“做游戏”的. 只见 70 高龄的主人将一张画着一组等距离平行线的纸铺在桌子上，把一堆每根长为平行线距离一半的小针递给客人. “请诸位把针一根根往纸上扔……”，客人们不知主人葫芦里卖的是什么药，但还是“客随主便”. 最后，主人数了数，共扔针 2212 次，其中与平行线相交 704 次. 2212/704 = 3.142，“这就是圆周率”. 客人们大吃一惊，圆周率竟隐藏在一场游戏之中.

在 1777 年出版的《或然性算术实验》一书中，蒲丰发表了这一用实验计算 π 的方法. 1894 年霍斯在投掷 1120 次后得到 π 的近似值为 3.14191850，1901 年意大利人拉兹瑞尼在投掷 3408 次后得

到 π 的近似值为 3.1415929.

蒲丰投针的重要性在于它是第一个用几何形式表达概率问题的例子,计算 π 的这一方法,不但因其新颖、奇妙而让人叫绝,而且它开创了使用随机数处理确定性数学问题的先河,是用偶然性方法去解决确定性计算的前导.

五、圆周率的记忆

为了帮助记忆多位 π 值,人们发明了形形色色的方法.如利用韵律优美的诗歌、有趣的故事、顺口的口诀等.我国著名数学家华罗庚曾给出过 23 位 π 值的记忆口诀:一天,有位老师上山与山顶寺庙里的和尚对饮,临走时,布置学生背圆周率,要求他们背到小数点后 22 位,大多数同学背不出来,十分苦恼.有一个学生把老师上山喝酒的事结合圆周率数字的谐音编了一段顺口溜:"山巅一寺一壶酒,尔乐苦煞吾,把酒吃,酒杀尔,杀不死,乐而乐",即 3.1415926535897932384626,待老师喝酒回来,个个背得滚瓜烂熟.

第十章　微积分中的重要常数 e

数 e 是自然对数的底，是数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，是一个无理数，是数学中的重要常数. 由于 e 是数学家欧拉引入的，所以又称 e 为欧拉数，欧拉采用 e 为底，建立了自然对数，所以 e 又称为自然数或自然对数的底数. 它的前 15 位小数是 e＝2.718251828459045…

e 在微积分里扮演了十分重要的角色，占有特殊的地位，同时也广泛应用于自然界和工程技术上.

本部分主要介绍数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛性（即 e 的存在性）证法，e 的发明及其思考，π 和 e 的联系，π 和 e 的“无理性”与“超越性”，e 与微积分公式.

一、数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛性的证法

1727 年欧拉把数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限记为 e，这个极限存在性的证明一般归结为证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单增且有上界，下面我们介绍几种数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛性的证法.

证法一(利用二项式展开)：

设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)++\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right);$$

注意到 $\left(1-\frac{1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，$\left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$，…，$\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$.

且 x_{n+1} 比 x_n 多一项 $\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)>0$，

$\Rightarrow x_{n+1}>x_n$，即 x_n 递增，又

$$0<x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+1+1-\frac{1}{n}<3.$$

$\Rightarrow x_n$ 有上界.

即数列$\{x_n\}$单调有界，故收敛.

证法二(利用 Bernoulli 不等式)：

$$设\ x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

注意到 Bernoulli 不等式$(1+x)^n\geqslant 1+nx$，($x>-1$，n 为正整数)，有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n,$$

由$-\frac{1}{(n+1)^2}>-1$利用 Bernoulli 不等式，有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^2+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1$$

$\Rightarrow x_n$ 递增.

为证$\{x_n\}$有上界，考虑数列 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 由

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}=\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1},$$

由$\frac{1}{n^2+2n}>-1$，利用 Bernoulli 不等式，有

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}\geqslant\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

$\Rightarrow y_n$ 递减.

显然有 $x_n<y_n\Rightarrow\forall n$，有 $x_n<y_n\leqslant\cdots\leqslant y_1=4$.
即数列 $\{x_n\}$ 有上界 4.

证法三（利用均值不等式）：

设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，

在 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$(a_i>0)$ 中，

令 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$，$a_n=1$，有

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot 1}\leqslant\frac{1}{n}\left[(n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+1\right]$$
$$=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

即 $\sqrt[n]{x_{n-1}}\leqslant\sqrt[n]{x_n}\Rightarrow x_{n-1}\leqslant x_n$，故 x_n 递增.

令 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1-\frac{1}{n-1}$，$a_n=1$，

可仿上证得数列 $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增.

当 $n\geqslant2$ 时，由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n^2}<1\Rightarrow1+\frac{1}{n}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n},$$

由 $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增 $\Rightarrow\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right\}$ 递减 $\Rightarrow x_n<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}<4$，

即数列 $\{x_n\}$ 有上界 4.

证法四（仍利用均值不等式）：

设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，

由 $a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}$ 得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$\Rightarrow x_n<x_{n+1}$ 即 x_n 递增，

参阅上述各证法可证有上界.

证法五(构造不等式)：

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，

对 $\forall\, 0\leqslant a<b$ 和正整数 n，有不等式 $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$. 事实上，

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}=\frac{(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots ba^{n-1}+a^n)}{b-a}$$

$$=b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n<(n+1)b^n$$

该不等式又可变形为 $b^n[(n+1)a-nb]<a^{n+1}$ $(0\leqslant a<b, n$ 为正整数).

在此不等式中，取 $a=1+\frac{1}{n+1}, b=1+\frac{1}{n}$，

则有 $0\leqslant a<b$，就有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Rightarrow x_n$ 递增.

取 $a=1, b=1+\frac{1}{2n}$，有 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<2\Rightarrow x_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4.$

又由 $x_{2n-1}<x_{2n}\Rightarrow x_{2n-1}<4\Rightarrow x_n<4$，即数列 $\{x_n\}$ 有上界 4.

二、e 的发明及其思考

1. e 的发明

1727 年欧拉把上述数列的极限命名为自然数 e(Euler 的第一个字母)，并用 e 作为对数的底，这种对数叫做自然对数，记作“ln”；他在《无穷小引论》一书中还定义了两个函数：

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \log x=\lim_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1).$$

这是利用简单极限定义指数函数和对数函数的著名公式，特别当 $x=1$ 时，就有 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

欧拉认为，一切函数均可展开成无穷级数，而指数函数 e^x 可写为：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

当 $x=1$ 时有 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

因此 e 的数值除可用数列 $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$，$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$，$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$，$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$，…，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，…计算外，也可用此式计算.

2. 为什么数学家们要用 e 作对数的底

我们知道，自然界的一切事物都有一定的因果关系. 数学和其他自然学科一样，它的发生、发展和成熟，归根结底决定于人类各种活动的需要.

在 17 世纪中叶，数学家们在科学活动中，发现了双曲线下的面积和自然对数之间竟有如此奇妙的关系 $\int_0^x\frac{dx}{x}=\ln|x|$ 之后，人们就逐渐了解到，很多重要的函数、极限、微分和积分……都与自然对数有密切的关系. 换句话说，用 e 作对数的底不是数学家们对 e 有特别的偏爱，而是一些“对数运算”的必然结果.

下面，我们用对数函数 $\log_a x$(这里 a 是不等于 1 的正数)求导数来说明这一点：

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x+\Delta x}{x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{1}{\Delta x} \log_a (1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a (1+\frac{1}{x/\Delta x})^{x/\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \to 0} (1+\frac{1}{x/\Delta x})^{x/\Delta x}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$x/\Delta x \to \infty$，由于 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(1+\frac{1}{x/\Delta x})^{x/\Delta x} = \mathrm{e}$，就有 $y' = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$.

用换底公式的一种形式 $\log_a \mathrm{e} = \frac{\log_e \mathrm{e}}{\log_e a}$——它更一般的形式是 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$，把上式中的 $\log_a \mathrm{e}$ 变成 $\frac{1}{\ln a}$，就得到 $y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$.

显然，如果不用 e 做底，而是以另一个数（例如 b）做底的话，就会出现 $y' = \frac{1}{x}\frac{\log_b \mathrm{e}}{\log_b a}$ 这种比 $y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$ 更复杂的形式，这是数学家们不愿意看到的.

上面，我们从求一个一般对数函数 $y = \log_a x$（这里 a 是不等于 1 的正数）的导数出发，发现只有用 e 为底结果才会简洁，而用其他数做底，形式就会复杂些. 由此可以看出，是“自然”选择了 e 做自然对数的底，数学家们不过是“发现者”、“执行人”罢了.

3. 以 e 为底的对数为什么叫自然对数

在 1616 年和 1619 年，S. 赖特和约翰·斯皮德尔都分别发表了“第一个自然对数表”，但此时用 e 做底编对数表是“自然”的，而不是“自觉”的.

为什么是“自然”而不是“自觉”的呢？这是为了加快制表的速度. 为什么用 e 做底可以加快制表的速度呢？

除了用先进方法计算对数以外，还有一条快速编制对数表的途径，那就是把对数的底变一变，变得使对数易于计算. 那么，选什

么数为底呢?

我们先来看下面的表:

以 10 为底的常用对数 $\lg N$	对应的真数 N
0.0000	$10^0=1$
0.0001	$10^{0.0001}=\sqrt[10000]{10}$
0.0002	$10^{0.0002}=\sqrt[10000]{100}$
…	…

从这个表可以看出,以 10 为底来编制对数表,哪怕是只精确到万分位,也会遇到把 10,100,1000,这些数开 10000 次方的困难.

但是,如果采用某个常数的 10000 次幂为底,就可以避免制表时开方的困难.下面,我们来说明这一点.下表是以 2^{10000} 为底的情形:

以 $a=2^{10000}$ 为底的对数 $\log_a N$	对应的真数 N
0.0000	$(2^{10000})^{0.0000}=1$
0.0001	$(2^{10000})^{0.0001}=2$
0.0002	$(2^{10000})^{0.0002}=2^2=4$
0.0003	$(2^{10000})^{0.0003}=2^3=8$
…	…

从表中可以看出,以 2^{10000} 为底就避免了开方的困难.

但是以 2^{10000} 为底还是不能解决根本问题,这又是什么原因呢?

原来,如果底很大,则相应真数的间隔也就很大,这样很多数的对数就无法获得.例如,在 2^{10000} 为底的对数表中,3,5,7,…这一连串数的对数就没有.若要算出这些数的对数,又得另花工夫.

经过这样一番探索之后容易发现，以 $a=b^{10000}$ 为底制作四位对数表，6 越接近 1，相应的真数间隔就越小，制成的对数表也就越精确. 从下面分别以 1.1^{10000}，1.01^{10000}，1.001^{10000} 为底制作的对数表的比较可以明显看出这一点.

$\log_a N$	$a=1.1^{10000}$ 时的 N	$a=1.01^{10000}$ 时的 N	$a=1.0001^{10000}$ 时的 N
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0001	1.1000	1.0100	1.0001
0.0002	1.2100	1.0201	1.0002
0.0003	1.3310	1.0303	1.0003
0.0004	1.4641	1.0406	1.0004
…	…	…	…

从上面的叙述可以看出 e 的确大显神通——极大地加快了数学家们编造对数表的速度.

英国数学家奥特雷德是自然对数的发明者——当然，他用的符号是“log”，此后人们才开始自觉地用 e 做底. 纳皮尔对数的底是 1/e.

如果设前面的 $y=\log_a x$ 中的 $a=e$，$y=\log_a x$ 就变为 $y=\log_e x$，很显然 $y'=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{x}$. 这也就是说，如果 $y=\ln x$，就有 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 的必然结果，而且只有 $\ln x$ 的导数才是 $\frac{1}{x}$，因为代数函数 x^n 求导不可能得到 $\frac{1}{x}$ 的形式. 这就是说，代数函数 x^n 不可能得到微分为 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的形式. 当然，也可以把 $y'=\frac{1}{x}$ 写成微分的形式 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{x}$.

积分是微分的逆运算，于是有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C.$$

这个式子就意味着：一个分式的分子是分母的微分，这个分式的积分就是分母以 e 为底的对数. 也就是说，只要形状是 $\int \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}=\int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}$，那么 $\int \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$，必然以 e 为底.

当然，我们也可以写成一种简单的定积分的形式

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|.$$

反映自然界的现象有种种函数关系，而要确立变量之间的函数关系，往往又要确立函数的导数或微分的关系式——微分方程. 从而通过求解这种微分方程，得出要求的函数关系. 如果在求解的微分方程中存在 $\int \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}$ 的项，那么显然积分以后就必然出现以 e 为底的对数. 而且，反映自然界规律的函数关系，如果是以指数形式或者对数形式出现的话，必定是、而且只能是以 e 为底的，而不会有其他正数为底的指数或对数出现——当然，不包括一些不严格的经验公式.

正因为如此，以 e 为底的对数叫“自然对数”——反映“自然规律”的对数.

总之，取 e 做对数的底，并不是某个或某些数学家的心血来潮，而是微积分学运算的必然结果. 又因为反映自然规律的指数形式或者对数形式的函数关系，必定是、而且只能是以 e 为底的，所以选 e 做底的对数叫自然对数.

4. 为什么采用以 e 为底的自然对数

在微积分中，人们通常采用以 e 为底的自然对数，而不是以 10 为底的常用对数，为什么作出这样的选择呢？

我们思考可能其中之一的原因是对对称美的考虑.我们知道，对数的引进对于简化运算有很大的好处，借助对数可将乘、除运算转化为加、减运算.但是在求对数 $\log_a N=b$，即 $N=a^b$ 时，常用对数却不是十分理想的.因为：

①真数 N 及其常用对数 $\lg N$ 的增长表现出明显的不对称性，当 N 从 1 增大到 10000 时，常用对数 $\lg N$ 却只从 0 增大到了 4.

②当真数 N 均匀增长时，其常用对数 $\lg N$ 的增长却是不均匀的.

M 为了克服这种不对称性，人们尝试采用较小的底数.当用 1.001 作为底数时，可以发现②中的增长基本上是均匀的；若改用 $(1.001)^{1000}$ 作为底数时，就能在很大程度上改变①中的不对称性；当依次采用 $1.1^{10}, 1.01^{100}, 1.001^{1000}, 1.0001^{10000}, \cdots$ 为底时，不对称性的情况将不断得到改进，而如果用上述数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限为底，则可以达到完全的对称.

三、π 和 e 的联系

毫无疑问，π 和 e 是数学中最重要的两个数.不但如此，它们还是如影随形的“邻居”加“亲戚”呢！我们把 π 和 e 四舍五入取整数，发现它们都是 3.可见 3 是这对“邻居”公用的“墙”.

再如 $\pi^4+\pi^5\approx e^6\approx 403.4288$，这个式子的趣味和奇妙在于 2，3，4，5，6 的等差数列关系——这里的 2 和 3，分别是 e 和 π 各自“取整”(即 $[e]=2, [\pi]=3$)后得到的数.

我们还知道，欧拉 1748 年的名著《无穷分析引论》中将数学中著名的“五朵金花”0，1，i，π，e 绽开在一个公式 $e^{i\pi}+1=0$ 中，这个公式，被德国数学家克莱因称为“整个数学中最卓越的公式之一”，也有数学家称之为数学中“最优美的公式之一”；美国数学家卡斯纳和纽曼在《数学和想象力》一书中认为：它可能是“世界上最短也

是最有名的公式……无论是神秘主义者、科学家、哲学家、数学家，都能感受到它的魅力”；美国数学家塞路蒙·波克纳在《数学在科学起源中的作用》中称为“魔术般的公式”；而以色列学者伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中的评价则为：“很多人认为它具有不亚于神的力量.”

四、π 和 e 的“无理性”与“超越性”

1. 兰伯特借助 e 证明 π 是无理数

1761 年，德国数学家兰伯特向柏林科学院提交论文，证明了 π 是无理数. 他的证明如下：

兰伯特用欧拉的方法，并从欧拉发现的 $\frac{e-1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots$ 和英国数学家布龙克尔发现的 $\frac{4}{\pi}=1+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\cdots$ 入手，先得出后人以他姓氏命名的两个连分式：

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{\frac{2}{x}}+\frac{1}{\frac{6}{x}}+\frac{1}{\frac{10}{x}}+\cdots,\tan x=\frac{1}{\frac{1}{x}}-\frac{1}{\frac{3}{x}}-\frac{1}{\frac{5}{x}}-\cdots$$

他研究这两个式子的性质之后，得到如下定理：

定理 1：如果 x 是 0 以外的有理数，则 $\tan x$ 必为无理数；反之，如果 $\tan x$ 是 0 以外的有理数，则 x 必为无理数.

定理 2：如果 x 是 0 以外的有理数，则 e^x 必为无理数；反之，如果 e^x 为 1 以外的有理数，则 x 必为无理数.

最后，他设 $x=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan x=1$；因为 1 是有理数，所以由定理 1 知道，$\frac{\pi}{4}$ 必为无理数，因而 π 也必为无理数.

2. e 是无理数的证明

我们用反证法来证明，先假设 $e=\frac{p}{q}$，其中 p 和 q 是整数，然

后导出一个与假设矛盾的结果，因为我们知道 $2<e<3$，e 不能是整数，所以 q 必然至少等于 2.

现在在级数 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 的两端同乘以 $q!=2\cdot3\cdots q$，得到

$$eq!=p\cdot2\cdot3\cdots(q-1)$$
$$=[q!+q!+3\cdot4\cdots q+\cdots+(q-1)q+q+1]+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots \quad (*)$$

左端显然是一个整数. 在右端，带方括号的那项同样也是整数，然而右端其余的项，合起来是一个小于 $\frac{1}{2}$ 的正数，因此不是整数. 这是因为对 $q\geqslant2$，级数 $\frac{1}{q+1}+\cdots$ 的项分别不超过等比级数 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ 的对应项，而后者的和是 $\frac{1}{3\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}\right]}=\frac{1}{2}$，所以 $(*)$ 式出现了一个矛盾：左端的整数不能等于右端的数；因为后一个数，是一个整数与一个小于 $\frac{1}{2}$ 的正数的和，不是一个整数.

3. e 与 π 的超越性

埃尔米特(C. Hermite，1822～1901)，生于法国洛林地区的迪约兹(Dieuze)，卒于巴黎. 1869 年起任巴黎综合工科大学分析学教授，他同时还是巴黎大学名誉教授和巴黎科学院院士，埃尔米特是 19 世纪最著名的函数论专家之一. 他在数学史上最为人知的成就是证明了 e 的超越性. 众所周知，从古希腊时代起，数学家们就接触到了超越数，例如与古典化圆为方问题密切相关的数 π 的特征始终是激发人们兴趣的源泉. 然而超越数的存在性直到 1844 年才被刘维尔

(J. Liouville)证明,从而肯定了代数数与超越数划分的正确性. 刘维尔已证明了 e 不可能是有理系数二次方程的根.

1873 年,埃尔米特发表了证明 e 的超越性的论文《论批数函数》.

埃尔米特证明 e 为超越数的论文用了高超的技巧,论文也很长,本书就不再讨论.

德国数学家林德曼借助于埃尔米特的方法,在 1882 年严格地证明了 π 是超越数. 从而最终否定了困绕数学界 2000 多年的化圆为方问题. 在 20 世纪,对超越数的研究已经成为现代数论中一个十分活跃的分支——超越数论.

五、e 与微积分公式

在微积分教科书中,几乎都会用较大的篇幅介绍 e 和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $=$e 这个数学中重要的基本极限.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$e 被称为第二个重要极限,它提供了求一类数列的方法与途径. 同时在微积分中,有许多公式、极限、积分都有 e 的身影.

在下面的微积分基本极限、重要极限中含有 e:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0\ (n>0),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^n}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n}{n!}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]=c=0.577215\cdots$$

在下面的基本积分公式中也含有 e：

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a}+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{(u+a)(u+b)}=\frac{1}{(b-a)}\ln\frac{u+a}{u+b}+C,$$

$$\int a^u\mathrm{d}u=\frac{a^u}{\ln a}+C,$$

$$\int\tan u\mathrm{d}u=-\ln\cos u+C,$$

$$\int\cot u\mathrm{d}u=\ln\sin u+C.$$

欧拉积分中含有 e：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,s>0,$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,p>0,q>0.$$

对数积分和指数积分中含有 e：

$$\mathrm{Li}x=\int_0^x\frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{Ei}x=\int_{-\infty}^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t.$$

第十一章　调和级数

调和级数是一个具体的、重要的数项级数，它是级数理论中一个重要的发散级数，在级数理论中占据重要的地位.人们对调和级数的认识和发散性的证明经历了曲折的智力考验，它促进了级数理论的完善，关于调和级数发散性的证明方法之多与技巧性之强，在微积分中是比较少见的.

本部分主要介绍调和级数的定义、莱布尼兹的贡献、伯努利兄弟与调和级数、伟大的定理——调和级数的发散性、调和级数发散性的另外两种早期证明、伯努利兄弟的遗憾、调和级数的前 n 项和以及调和级数发散性证明方法集锦.

一、调和级数的定义

形如

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的级数称为调和级数，它是 $p=1$ 的 p 级数.

调和级数是发散级数.在 n 趋于无穷时其部分和没有极限(或部分和为无穷大).

从更广泛的意义上讲，如果 $\{a_n\}$ 是一个不含 0 的等差数列，则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 就称为调和数列，求和所得即为调和级数，所有调和级数都

是发散于无穷的.

二、莱布尼兹的贡献

1672 年,莱布尼兹作为高级外交使节被派往巴黎,他在巴黎遇上了荷兰科学家克里斯蒂安·惠更斯,从此莱布尼兹经常向惠更斯请教,以提高自己的数学水平.惠更斯也非常愿意给这位年轻的外交家指导.

惠更斯指导莱布尼兹研究的一个问题是求三角形数的倒数和.所谓三角形数,就是对应于三角形阵列的数字,如图 11-1 所示.第一个三角形数是 1,第二个是 3,第三个是 6…第 k 个三角形数等于$\frac{k(k+1)}{2}$,即求 $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots$的值.

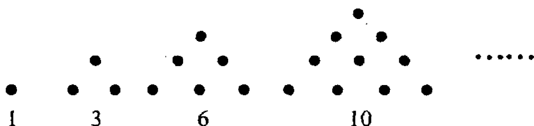


图 11-1

莱布尼兹把方程的所有各项全都除以 2,得

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

在这个方程式中,莱布尼兹发现了一个突出的特点,也就是说,他可以用等价式 $1-\frac{1}{2}$替换方程右边的第一项$\frac{1}{2}$,然后依次用$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$替换$\frac{1}{6}$,用$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$替换$\frac{1}{12}$,等等.这样,就将上述方程变为:

$$\frac{1}{2}S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

然后,莱布尼兹去掉括号,并约消化简得:

$$\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=1$$

如果说，S 的一半等于 1，那么，S 本身（即三角形数的倒数和）就显然等于 2. 总之，莱布尼兹非常巧妙地解决了惠更斯的挑战，并发现：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\cdots=2.$$

虽然现代数学家对莱布尼兹解无穷级数的方法持有一定的保留意见，但谁也不能否认他的方法的基本独创性.

这仅仅是莱布尼兹对数学超凡洞察力的开始. 莱布尼兹还研究了交错级数，给出了交错级数的收敛判别法（现称为莱布尼兹判别法），发现了 17 世纪最精彩的数学发现：

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2.$$

不久，莱布尼兹又以其巨大的才智，研究牛顿在 10 年前论述的关于切线与面积的同一问题. 1676 年，莱布尼兹离开了巴黎，这时，他已经发现了微积分的基本原理. 在巴黎生活的四年，使他从一个数学上初出茅庐的新手成长为一个数学巨人.

三、伯努利兄弟与调和级数

微积分的发展与无穷级数的研究密不可分，雅各布·伯努利与弟弟约翰·伯努利都是天才数学家，他们在 1689～1704 年间撰写了 5 篇关于无穷级数的论文，使他们成为当时这一领域的权威，这些论文引起了关于级数求和及收敛性的进一步研究.

我们下面讨论一个由伯努利兄弟两人共同创立的伟大定理，这个定理所涉及的是关于调和级数的性质问题，所谓“调和级数”，是一种具有特殊性质的无穷级数. 虽然我们已见到过莱布尼兹所

研究的一种特殊级数，但我们还是应首先对无穷级数问题作一番概述.

17 世纪时，无穷级数仅仅被看作是无穷项的和. 当然，不能保证这种级数一定会有一个有限和；例如，像 $1+2+3+4+5+\cdots$ 这样的级数，如果我们继续进行下去，其和显然会不断增大，并超过任何有限量. 我们说，这种级数为"发散无穷级数".

另一方面，也存在一种无穷多项的级数，其和为有限数. 这种现象，初步看来，似乎自相矛盾，但仔细想一想，就会发现非常合理. 例如，

在我们写出大家所熟悉的小数展开式 $\frac{1}{3}=0.3333333\cdots$ 时，我们准确的意思是

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots$$

我们前面所介绍的莱布尼兹级数就显示了同样的性质，级数的无穷多项的和等于一个(有限的)数 2.

我们说，这种级数为"收敛级数"，也就是说，当我们增加更多的项时，它的和越来越接近某一特定的值.

无疑，数学中最重要的收敛级数是几何级数，其形式为

$$a+a^2+a^3+a^4+\cdots+a^k+\cdots$$

在此，我们设 $-1<a<1$. 因此，几何级数就是 a 及其所有高次幂的和. 我们证明这种级数的收敛性如下：

设 $S=a+a^2+a^3+a^4+\cdots$ ①

两边同乘 a，得 $aS=a^2+a^3+a^4+a^5+\cdots$ ②

然后将这两式相减，得

$$S-aS=(a+a^2+a^3+a^4+\cdots)-(a^2+a^3+a^4+a^5+\cdots)=a,$$

$S(1-a)=a$，因而 $S=\frac{a}{1-a}$.

由于 S 是原几何级数的和，因此，我们可以认为：

$$a+a^2+a^3+a^4+a^5\cdots=\frac{a}{1-a}.$$

例如，如果 $a=\frac{1}{3}$，则

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

就数学的精密性而言，对无穷级数收敛性的这一证明显得十分幼稚，相比之下，现代数学对这个问题的论证就精妙得多.

在上面的证明中，没有体现出为什么要设 $-1<a<1$；当然我们要做 $-1<a<1$ 的假设，可以用下面的例子来说明：

如果 $a=2$，我们直接应用公式，就得到 $2+2^2+2^3+2^4+\cdots=\frac{2}{1-2}$；也就是说 $2+4+8+16+\cdots=-2$. 这是一个“双重荒谬”的结果：一方面因为这个级数显然是发散无穷级数，另一方面还因为人们无法想象一系列正数相加的结果竟然得出一个负数. 因而，几何级数的求和公式要求 a 必须位于 -1 与 1 之间. 上述两个无穷级数说明了一般收敛级数的一个重要条件.

对于第一个 $a=\frac{1}{3}$ 的几何级数来说，其一系列的项 $\left(\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots\right)$ 越来越接近于零；因此，后面的各项可以越来越忽略不计.

对于 $a=2$ 的几何级数来说，其一系列的项则离零越来越远——4，8，16，等等，其愈益增大的数值使其和不能等于一个有限数.

根据这两个例子，我们可以非常合理地提出下述推测：

在无穷级数 $x^1+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^k+\cdots$ 中，如果，并且只有当通项 x^k 的值趋向于零时，其和才能够收敛为有限数.

正如结果所示,这个推测有一半是正确的. 即,如果级数收敛于一个有限数,则级数中的通项一定趋向于零. 换句话说,除非通项趋向于零,否则,我们不能将一个无穷级数表示为一个有限数.

然而,遗憾的是,其逆命题却是错误的. 也就是说,有的无穷级数,即使其通项趋向于零,但其和却趋向于无穷. 这一事实并不是显而易见的,1689 年伯努利发现在调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$$

(即正整数的倒数和)中,虽然其通项趋向于零,但它的和却是无穷大.

伯努利发现了当今数学家称之为“病态反例”的现象——即一个似乎违反直觉的特定例子,其古怪之至,堪称“病态”.

这一调和级数非常麻烦:要使其和不大于 5,就必须将级数的前 83 项相加,因为:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{82}=4.990020\cdots<5.00,$$

而 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{83}=5.002068\cdots>5.00.$

在这一调和级数中,超过第 83 项以后的每一项都小于$\frac{1}{83}$,因而对其和的增值作用不大. 所以,要使和大于 6,就必须再加 144 项.

由于其和增值非常缓慢,因此,要使级数和等于 10,就必须将前 12367 项相加,而要使级数和等于 20,就要加 2.5 亿项! 人们似乎根本难以想象调和级数最终可能会超过 100,1000,甚至 10000 亿.

但事实的确如此! 而这正是其之所以被称为病态和伯努利的定理之所以值得我们注意的原因.

四、伟大的定理——调和级数的发散性

调和级数发散性的证明是约翰·伯努利作出的，但却刊载在哥哥雅各布1689年的《论无穷级数》一书中. 出于少见的兄弟情谊，雅各布甚至在书的序言中承认了弟弟对这一证明方法的优先权.

约翰·伯努利证明调和级数向无穷发散. 是以莱布尼兹的收敛级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=1$为基础.

约翰·伯努利作了如下推理：

定理：调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$的和是无穷的.

证明：引入$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$这是一个缺少第一项的调和级数.

将这一级数"变为分子是1,2,3,4等等的分数"，就得到

$$A=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\cdots$$

约翰·伯努利将这一级数作为后面的参考，然后，他设定前述莱布尼兹的级数为C，并从这一级数中连续减去$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20}$，等等，由此构成一系列相关级数：

$$C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=1$$

$$D=\quad\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=C-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E=\qquad\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=D-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$F=\qquad\quad\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=E-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

$$G= \qquad \frac{1}{30}+\cdots=F-\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$$

$$\vdots$$

约翰·伯努利接着将这一方程阵列的最左边两列相加,得到:

$$\begin{aligned}C+D+E+F+\cdots&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)+\cdots\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\cdots=A.\end{aligned}$$

另一方面,如果将这一方程阵列的最左边和最右边的两列相加,他发现:

$$C+D+E+F+G+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=1+A.$$

由于 $C+D+E+F+G+\cdots$ 既等于 A,又等于 $1+A$,因而,约翰·伯努利只能得出结论:$1+A=A$. 正如他所说的那样:“整体等于部分.”但是,显然没有一个有限数会等于大于自己的数. 约翰·伯努利认为,这只能说明一个问题:即 $1+A$ 是无穷大. 而 $1+A$ 则是调和级数的和,所以,他的证明完毕.

今天的数学家可以对这一证明提出一些公正的批评意见. 约翰·伯努利是以一种“整体论”的态度来对待无穷级数的,他将其作为一个独立个体而随意处置. 我们现在懂得,在处理这些数学问题时,必须特别慎重. 并且,他证明调和级数发散性的方法与现代方法形成了鲜明的对照.

今天的数学家采用下述方法证明级数的发散性:首先确定正整数 N(不论其数值多大),并证明该级数必定大于 N;那么,既然该级数大于任意正整数 N,则这个级数一定趋向无穷. 但是,约翰·伯努利没有这样证明. 相反,他用更加简明的 $A=1+A$ 来证明级数的发散性,对于现代读者来说,这是证明量的无穷性的一个最

独特的方法.

我们必须承认,约翰·伯努利利作出这一论证之后150年,才有真正精确的级数理论出现,考虑到这一点,或许可以不至于过分挑剔.并且,尽管有种种异议,但谁也无法否认约翰·伯努利论证方法的巧妙.约翰·伯努利的证明恰似数学王冠上的一颗明珠.

雅各布·伯努利在其《论无穷级数》一书中就他弟弟的证明强调了一个非直观的重要推断,他写道:“一个最后一项为零的无穷级数之和也许是有限的,也许是无穷的.”

现代数学家称赞他提出了无穷级数的“最后一项”问题,因为这些无穷级数的性质的确排除了任何最后项;然而,他的意思非常明确.他所强调的是,在无穷级数中,即使其中的某些项接近于零,其和仍然可能是无穷的.调和级数就是这种现象的首要例子,已如约翰·伯努利所证明.

也许是因为这一结果太出乎意料了,雅各布·伯努利情不自禁,挥笔写下了一首数学短诗:

“有限环绕无穷级数朝夕相伴,在无限的王国中也存在着有限;至大寓于细微之所,而最狭小的有限中却见到无限.在无限中认识细微是多么快乐,巨大存在于细小之中,啊! 神秘的上天!”

五、调和级数发散性的另外两种早期证明

在讲到约翰·伯努利对调和级数发散性的证明时,雅各布·伯努利曾说过,“是我弟弟首先发现的”.如果雅各布·伯努利认为是约翰第一个掌握了调和级数的奇特性质,他就完全错了,因为至少有两个前辈数学家曾证明过调和级数的发散性.这两个数学家的证明各不相同,而且,也不同于上述约翰的证明,但每个人的证明都显示了自己独特的智慧.

最早对调和级数发散性作出证明的是14世纪的法国学者尼科尔·奥雷姆(1323～1382年).

大约在1350年,奥雷姆写出了一部非凡的著作,题为《欧几里得几何问题》.当然,这是一部非常古老的文献,比卡尔达诺的《大衍术》还早了整整200年.尽管这部著作产生于我们也许可以称为欧洲数学的"石器时代",但奥雷姆的著作中的确含有一些非常精彩的论题.

特别是,他论述了调和级数的性质,他的全部论证如下:

"……将1英尺与$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$英尺等相加,其和无穷,实际上,可以构成一个其和大于$\frac{1}{2}$的多项无穷数.

因此:$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$大于$\frac{1}{2}$;$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$大于$\frac{1}{2}$;$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}$大于$\frac{1}{2}$等等."

实际上,奥雷姆的意思是用其和等于$\frac{1}{2}$的较小分数替换调和级数中的一组分数.

即:

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{4}{2},$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)>\frac{4}{2}+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{2}.$$

这一方程可以扩展为适用于任何整数k的一般公式:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k+1}{2}.$$

例如,如果 $k=9$,我们看到:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{512}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^9}>\frac{9+1}{2}=5;$$

如果 $k=99$,则 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{99}}>\frac{100}{2}=50.$

如果 $k=9999$,我们得到:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{9999}}>\frac{9999+1}{2}=5000.$$

这样,只要取调和级数中足够多的项,我们就能够保证其和大于 5、50 或 5000,或一般地说,大于任何有限量.

这种方法保证了所有调和级数都大于任何有限量,并因而趋向无穷.奥雷姆的证明巧妙、简洁和易记,已写入了现代大部分数学教科书中.但是,伯努利兄弟似乎不知道有这样一个证明存在.

先于约翰·伯努利作出证明的还有另外一位数学家——意大利数学家彼得罗·门戈利(1625～1686 年).门戈利的论证作于 1647 年,因而比伯努利的证明早 40 年.门戈利的证明非常简单,他首先提出了一个初步命题.

定理　如果 $a>1$,那么,$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a}$.

证明　首先提出一个明显的论据,即 $2a^3>2a^3-2a=2a(a^2-1)$,将这个不等式的两边分别除以 $a^2(a^2-1)$,得

$\frac{2a^3}{a^2(a^2-1)}>\frac{2a(a^2-1)}{a^2(a^2-1)}$或简化为$\frac{2a}{a^2-1}>\frac{2}{a}$,因此

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2-1}>\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=\frac{3}{a}.$$

这一命题保证了在三个连续整数的倒数相加时,其和一定大于中间数字的倒数的三倍.我们可以用数字来检验,例如,$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}>\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$或$\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}>\frac{3}{33}=\frac{1}{11}$.

这就是门戈利在他 1647 年对调和级数的简短证明中所需要的初步命题.

定理 调和级数趋向无穷.

证明 设 H 为调和级数的和. 通过对级数各项归组和反复应用上述不等式,我们发现:

$$
\begin{aligned}
H &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&\quad \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)+\cdots\\
&>1+\left(\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{3}{12}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)+\cdots\\
&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\\
&=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&\quad \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)+\cdots\\
&>2+\left(\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{3}{12}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)+\cdots\\
&=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\\
&=3+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&\quad \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)+\cdots
\end{aligned}
$$

门戈利证明的精彩之处就在于它的自我复制性质. 他每次将他的初步定理应用于调和级数,他就再一次遇到调和级数,但这一次则增加了一个单位. 我们来看以上的不等式,我们发现,H 大于 1、大于 2、大于 3;而且,如果我们继续重复这一过程,H 大于任何有限量. 因此,我们可以与门戈利一道得出结论,调和级数的和一

定是无穷大.

六、伯努利兄弟的遗憾

1689年伯努利兄弟在《论无穷级数》一书中,证明调和级数发散之后,又进一步阐述了整数平方的倒数和问题.即求

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

他发现,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

他注意到,

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3},\frac{1}{9}<\frac{1}{6},\frac{1}{16}<\frac{1}{10},$$

一般来说,$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$.他由此推理,

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{2}{k(k+1)}+\cdots=2.$$

他应用了莱布尼兹求和定理,上述级数趋向某一小于2的有限数.

虽然伯努利兄弟知道这一无穷级数是收敛级数,但他们未能找到其和的精确数值.雅各布带着几分遗憾地说:"如果有人能够发现并告知我们迄今为止尚未解出的难题的答案,我们将不胜感谢."

求级数$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$的值是一个非常难的难题,看来,只能由一个胜过伯努利兄弟的天才来解出这一级数的和了.

1734年,一位师从约翰·伯努利的青年人终于解出了这道难

题.在求这一级数和的过程中,犹如在数学的许多其他领域一样,这个青年人最终超过了他的老师.实际上,他超过了曾经就数学研究写过些什么的所有人.这个青年学生就是欧拉.

七、调和级数的前 n 项和

随后很长一段时间,人们无法使用公式去逼近调和级数,直到无穷级数理论逐步成熟.

1665 年牛顿在他的著名著作《流数法》中推导出第一个幂级数:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

欧拉(Euler)在 1734 年利用牛顿的成果首先获得了调和级数有限多项和的值.结果是:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+c.$$

他的证明是这样的:根据牛顿的幂级数有:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^2}-\cdots$$

于是:

$\frac{1}{x}=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\cdots$,将 $x=1,2,\cdots,n$ 代入得:

$$1=\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2\times 4}-\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{4\times 16}-\cdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n}=\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2\times n^2}-\frac{1}{3\times n^3}+\frac{1}{4\times n^4}-\cdots$$

相加,得:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)+\cdots$$

后面那一串和都是收敛的，我们可以定义

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+c.$$

欧拉近似地计算了 c 的值，约为 0.577218. 这个数字后来被称作欧拉常数.

八、调和级数发散性的几种证明方法

如前所述，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性最早是由法国学者尼古拉・奥雷姆(1323～1382)在极限概念被完全理解之前的 400 年证明的. 后来，大数学家约翰・伯努利也作出了经典的证明. 伯努利作出这一论证之后的 150 年，才有真正的级数理论出现.

随着级数理论的不断完善，我们可以应用更多更精彩的方法证明调和级数的发散性. 例如：利用欧拉常数，级数与广义积分敛散性的关系，级数及数列敛散性的定义和性质，级数敛散性的各种判别法，均值不等式等. 在级数敛散性的讨论中，调和级数的应用很广泛. 了解这些证明方法，对级数敛散性的学习和研究是有益的，特别在其证明方面能起到举一反三、融会贯通的作用.

证法一：利用反证法

假设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，记其和为 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，由于正项级数若收敛，加括号后仍收敛，且和不变，可知：

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\cdots$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)+\cdots$$

$$\geqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)+\cdots$$

$$= \frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)=\frac{1}{2}+S,$$

$$S \geqslant \frac{1}{2}+S$$

从而 $0 \geqslant \frac{1}{2}$ 矛盾，所以调和级数必发散.

证法二：利用加括号

依次将 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 9 项，90 项，900 项，…括在一起得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{999}\right)+\cdots$$

$$>\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{1000}\right)+\cdots$$

$$=\frac{9}{10}+\frac{90}{100}+\frac{900}{1000}+\cdots$$

$$=\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots$$

从上式中可以看出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的和可任意大，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法三：利用柯西收敛准则

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，事实上，存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意自然数 N，总能找到两个自然数 $m_0>N$，$n_0=2m_0$，当然也有 $2m_0>N$，

使得

$$|S_{2m_0}-S_{m_0}|=\frac{1}{m_0+1}+\frac{1}{m_0+2}+\cdots+\frac{1}{2m_0}$$
$$>\frac{1}{2m_0}+\frac{1}{2m_0}+\cdots+\frac{1}{2m_0}$$
$$=\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

据柯西收敛准则的否定叙述，$\{S_n\}$发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法四：利用子列

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m+1}\right)$$
$$>1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+\cdots+2^{m-1}\times\frac{1}{2^m}$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\right)=1+\frac{m}{2},$$

于是 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty$. 即 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2^m}=+\infty$. 故数列 $\{S_n\}$发散，从而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法五：利用欧拉常数

证明数列$\{a_n\}$存在极限 C(欧拉常数)，这里

$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=C+\varepsilon_n$，其中 $\varepsilon_n\to 0$（当 $n\to\infty$时）.

因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，所以 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，从而有

$$\ln 2-\ln 1<1,\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},\cdots,\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

上述 n 个不等式两边相加得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0.$$

即 $\{a_n\}$ 有下界. 其次应用不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，有

$$a_n-a_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}>0.$$

故 $\{a_n\}$ 有是一个单调下降的数列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，用 c 表示，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c.$$

也就是

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n\,(\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0).$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n+c+\varepsilon_n)=+\infty$. 故调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法六：利用相同级数的敛散性

应用级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（其中 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$）与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 有相同的敛散性.

取 $a_n=\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$，$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>\frac{1}{n}>0$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=+\infty$ 发散. 故调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法七:利用广义积分

对于部分和数列$\{S_n\}$:$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,有$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,而$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,故调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证法八:利用子级数

调和级数中分母末位含有零的项组成的子级数是

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{100}+\frac{1}{110}+\cdots+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1010}+\cdots+\frac{1}{10000}+\frac{1}{10010}+\cdots+\frac{1}{100000}+\cdots$$

在此级数中,分母从 10 到 100 的项共有 10 项,其和大于$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$;

分母从 110 到 1000 的项共有 90 项,其和大于$\frac{90}{1000}=\frac{9}{100}$;

分母从 1010 到 10000 的项共有 900 项,其和大于$\frac{900}{10000}=\frac{9}{100}$;…

分母从10^n+10到10^{n+1}的项共有$9\times10^{n-1}$项,其和大于$\frac{9\times10^{n-1}}{10^{n+1}}=\frac{9}{100}$;

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\geqslant\frac{1}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{100}+\cdots$. 显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,于是调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证法九:利用重要命题

命题:"设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,且 $a_{n+1}<a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$,则有 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$".

以下是这个命题的证明:因正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,下式成立

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}|=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由已知 $a_{n+1}<a_n(n=1,2,3,\cdots)$,而 $a_{n+1}>a_{n+2}>\cdots>a_{2n-1}>a_{2n}(n=1,2,3,\cdots)$,

得 $na_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}$, $2na_{2n}<\varepsilon$,故有 $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n}=0$. 又 $a_{2n+1}<a_{2n}$,

故有 $(2n+1)a_{2n+1}<(2n+1)a_{2n}=2n\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdot a_{2n}$,

得 $0\leqslant\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}2n\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdot a_{2n}=0$. 故有 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$. 所以无论 n 为奇数或偶数时,下式成立

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0.$$

即通项下降趋于零的正项级数收敛的一个必要条件证毕. 运用该定理可得 $\lim_{n\to\infty} na_n=ng\frac{1}{n}=1\neq0$ 故调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法十:利用重要函数不等式

不等式:$x>\ln(1+x)$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\ln(1+n)\to\infty(n\to\infty).$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$,故调和级数发散.

证法十一:利用平均值不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

取 $a_1=1,a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{3},\cdots,a_n=\frac{1}{n}$,

则
$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\geqslant\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

当 $n\to\infty$,左边为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,右边为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\infty$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法十二:利用初等不等式

$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}>\frac{3}{n}(n\geqslant2,n\in N)$来证明.

首先证明上述不等式成立,因为

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n}=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{(n+1)n}$$

$$=\frac{2n}{(n-1)n(n+1)}>0,$$

所以
$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}>\frac{3}{n}(n\geqslant2,n\in N).$$

所以

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{3}{3}=1,$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}>\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}>\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\cdots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots>1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$
$$+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n}\cdots$$
$$=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$>2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots.$$

所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是无穷数.所以调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法十三:利用拉阿伯判别法

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数,$\exists N'\in N$,$\forall n\geqslant N'$,有 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r>1$ $\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant 1\right)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛(发散).

在调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中,$\forall\ n\in \mathrm{N}$,均有 $\left(n\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{n+1}{n}-1\right)=1$,所以调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证法十四:应用厄耳玛可夫判别法

若$f(x)$为单调减少的正值函数,且$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda$,则当 $\lambda<1$

时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛；当 $\lambda>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

令 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x g\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x=+\infty$，

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法十五：应用高斯判别法

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中，若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$ 及 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}(|\theta_n|<C,\varepsilon>0)$，则(1)当 $\lambda>1$ 时，级数收敛；(2) $\lambda<1$ 时级数发散；(3)当 $\lambda=1$ 时，若 $\mu>1$ 则级数收敛，若 $\mu\leqslant1$ 则级数发散.

在调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中，$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$，据高斯判别法知，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法十六：利用相关级数敛散性命题

设 $a_n>0$，$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散.

以下是这个命题的证明：因为 $a_n>0$，s_n 单调增加，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{s_k}\geqslant\frac{\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k}{s_{n+p}}=\frac{s_{n+p}-s_n}{s_{n+p}}=1-\frac{s_n}{s_{n+p}}.$$

因为 $s_n\to+\infty$，故 $\forall n$，当 $p\in\mathrm{N}$ 充分大时，有 $\frac{s_n}{s_{n+p}}<\frac{1}{2}$，

从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{s_k}\geqslant1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散.

令 $a_n=1, n=1,2,\cdots$ 则 $s_n=1+1+\cdots+1=n$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证法十七:利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$ 的发散性

记 $a_n=\frac{(-1)^{\ln n}}{n}$,为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性,我们引进集合 $A_k=\{n\mid[\ln n]=k\}, k=(1,2,\cdots)$. 那么集合 A_k 内的元素 n 具有性质 $k\leqslant\ln n\leqslant k+1$,或写成 $e^k\leqslant n\leqslant ege^k$,其个数 $p_k=[(e-1)e^k]$,将 A_k 内的元素从小到大排列,可记为 $n_k, n_k+1,\cdots,n_k+p_k-1$.

$$
\begin{aligned}
\text{现考虑 } u_k &= \sum_{n\in A_k}a_n=\sum_{n\in A_k}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}\\
&=(-1)^k\sum_{n\in A_k}\frac{1}{n}\\
&=(-1)^k v_k,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
v_k&=\sum_{n\in A_k}\frac{1}{n}=\sum_{v=0}^{p_k-1}\frac{1}{n_k+v}\geqslant\sum_{v=0}^{p_k-1}\frac{1}{ege^k}=\frac{p_k}{ege^k}[(e-1)e^k]\\
&\geqslant\frac{1}{ege^k}g\ \frac{1}{2}(e-1)ge^k=\frac{e-1}{2e}.
\end{aligned}
$$

下面证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是发散的,采用反证法,假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则由柯西收敛准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 N_0,使得当 $n\geqslant N_0$ 时,对于一切自然数 p,均有 $|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

今取 $\varepsilon=\frac{e-1}{4e}>0$,对于有此 ε 所找到的 N_0,在 $n\geqslant N_0$ 中选一个数 n_k,此处 k 是适当大的一个自然数,有 $n_k\in A_k$,即 $e^k\leqslant n_k<ege^k$.

又取自然数 $p=p_k-1$,则此时应有

$$|a_{n_k}+a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k+p_k-1}|<\varepsilon, \tag{1}$$

但另一方面却有

$$|a_{n_k}+a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k+p_k-1}|=|u_k|=v_k\geqslant\frac{e-1}{2e}=2\varepsilon>\varepsilon, \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾,因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

利用这个结论我们可以证明调和级数发散.

由于$\left\{\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}\right\}$的部分和大于$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的部分和,所以由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$ 发散知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

第十二章　欧拉与级数求和

欧拉是18世纪最优秀的数学家，也是历史上最伟大的数学家和最多产的数学家之一.微积分的发明是人类精神的最高胜利，但牛顿、莱布尼兹创始的微积分基础不稳，应用范围也有限.18世纪有一批数学家都在努力拓展微积分，同时也在大力推进它的应用.欧拉对“微积分”成长更是倾注了更多的心血，他起了十分重要的作用.欧拉在微积分方面，用形式化的函数理论，把微积分从几何学的束缚中彻底解放出来，使其建立在算术和代数的基础上，他扩展了微积分的领域，把无穷级数由一般的运算工具转变为一个重要的研究科目.欧拉被称为“分析的化身”.

本部分主要介绍欧拉的生平、欧拉与哥尼斯堡七桥问题、欧拉公式以及欧拉在级数求和方面的独特贡献.

一、数学英雄——欧拉

欧拉(Euler，1707～1783)，瑞士数学家与自然科学家.1707年欧拉出生在瑞士的巴塞尔城，小时候他就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》.这本书连他的几位老师都没读过，可小欧拉却读得津津有味，遇到不懂的地方，就用笔作个记号，事后再向别人请教.

欧拉的父亲保罗·欧拉曾在巴塞尔大学上过学，与当时著名

的数学家约翰·伯努利与雅各布·伯努利有几分情谊，因此欧拉认识了这两位数学家，并与约翰·伯努利的两个儿子，擅长数学的尼古拉·伯努利及丹尼尔·伯努利成了好朋友。

1720 年，由约翰·伯努利保举，13 岁的欧拉进巴塞尔大学读书，这在当时是个奇迹，曾轰动了数学界．小欧拉是这所大学，也是整个瑞士大学校园里年龄最小的学生．两年后的夏天，欧拉获得巴塞尔大学的学士学位，次年，欧拉又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位．1725 年，欧拉开始了他的数学生涯．



1725 年丹尼尔·伯努利赴俄国，并向沙皇喀德林一世推荐了欧拉，这样，在 1727 年 5 月 17 日欧拉来到了彼得堡．1733 年，年仅 26 岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授．1735 年，欧拉解决了一个天文学的难题（计算彗星轨道），这个问题经几个著名数学家几个月的努力才得到解决，而欧拉却用自己发明的方法，三天便完成了．然而过度的工作使他得了眼病，右眼不幸失明了，这时他才 28 岁．

1741 年欧拉应普鲁士彼德烈大帝的邀请，到柏林担任科学院物理数学所所长，直到 1766 年，后来在沙皇喀德林二世的诚恳敦聘下重回彼得堡，不料没有多久，左眼视力衰退，最后完全失明．不幸的事情接踵而来，1771 年彼得堡的大火灾殃及欧拉住宅，带病而失明的 64 岁的欧拉被围困在大火中，虽然他被别人从火海中救了出来，但他的书房和大量研究成果全部化为灰烬了．沉重的打击，仍然没有使欧拉倒下，他发誓要把损失夺回来．欧拉完全失明以后，虽然生活在黑暗中，但仍然以惊人的毅力与黑暗搏斗，凭着记忆和心算进行研究，直到逝世，竟达 17 年之久．

1783 年 9 月 18 日，在不久前才刚计算完气球上升定律的欧

拉,在兴奋中突然停止了呼吸,享年 76 岁. 欧拉生活、工作过的三个国家:瑞士、俄国、德国,都把欧拉作为自己的数学家,为有他而感到骄傲.

欧拉的记忆力和心算能力是罕见的,他能够复述年轻时代笔记的内容,心算并不限于简单的运算,高等数学一样可以用心算去完成. 有一个例子足以说明他的本领,欧拉的两个学生把一个复杂的收敛级数的 17 项加起来,算到第 50 位数字,两人相差一个单位,欧拉为了确定究竟谁对,用心算进行全部运算,最后把错误找了出来. 欧拉在失明的 17 年中,还解决了使牛顿头痛的月离问题和很多复杂的分析问题.

欧拉的风格是很高的,拉格朗日是稍后于欧拉的大数学家,从 19 岁起和欧拉通信,讨论等周问题的一般解法,这引起变分法的诞生. 等周问题是欧拉多年来苦心考虑的问题,拉格朗日的解法,博得欧拉的热烈赞扬,1759 年 10 月 2 日欧拉在回信中盛赞拉格朗日的成就,并谦虚地压下自己在这方面较不成熟的作品暂不发表,使年青的拉格朗日的工作得以发表和流传,并赢得巨大的声誉. 他晚年的时候,欧洲所有的数学家都把他当作老师,著名数学家拉普拉斯(Laplace)曾说过:“读读欧拉、读读欧拉,它是我们大家的老师!”当欧拉 64 岁高龄之时,一场突如其来的大火烧掉了他几乎全部的著述,而神奇的欧拉用了一年的时间口述了所有这些论文并作了修订. 一年以后,1783 年 9 月 18 日的下午,欧拉为了庆祝他计算气球上升定律的成功,请朋友们吃饭,那时天王星刚发现不久,欧拉写出了计算天王星轨道的要领,还和他的孙子逗笑,喝完茶后,突然疾病发作,烟斗从手中落下,口里喃喃地说:“我要死了”,欧拉终于“停止了生命和计算”.

欧拉渊博的知识、无穷无尽的创作精力和空前丰富的著作,都是令人惊叹不已的! 他从 19 岁开始发表论文,直到 76 岁,半个多世纪写下了浩如烟海的书籍和论文. 可以说欧拉是科学史上最多

产的一位杰出的数学家，据统计，他那不倦的一生，共写下了886本书籍和论文（七十余卷，牛顿全集八卷，高斯全集十二卷），其中分析、代数、数论占40%，几何占18%，物理和力学占28%，天文学占11%，弹道学、航海学、建筑学等占3%，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年．时至今日几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字，从初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数的欧拉公式等等，数也数不清．他对数学分析的贡献更独具匠心，《无穷小分析引论》一书便是他划时代的代表作，当时数学家们称他为“分析学的化身”．

欧拉著作的惊人多产并不是偶然的，他可以在任何不良的环境中工作，他常常抱着孩子在膝上完成论文，也不顾孩子在旁边喧哗．他那顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神，使他在双目失明以后，也没有停止对数学的研究，在失明后的17年间，他还口述了几本书和400篇左右的论文．19世纪伟大数学家高斯（Gauss，1777～1855年）曾说：“研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法”．

欧拉的一生，是为数学发展而奋斗的一生，他那杰出的智慧，顽强的毅力，孜孜不倦的奋斗精神和高尚的科学道德，永远是值得我们学习的．欧拉在数学、物理、天文、建筑乃至音乐、哲学方面都取得了辉煌的成就．在数学的各个领域，常常见到以欧来命名的公式、定理和重要常数．课本上常见的如π（1736年），i（1777年），e（1748年），sin和cos（1748年），tan（1753年），Δx（1755年），$\sum$（1755年），$f(x)$（1734年）等，都是他创立并推广的．歌德巴赫猜想也是在他与歌德巴赫的通信中提出来的．欧拉还首先完成了月球绕地球运动的精确理论，创立了分析力学、刚体力学等力学学科，深化了望远镜、显微镜的设计计算理论．

二、欧拉与哥尼斯堡七桥问题

18 世纪时，欧洲有一个风景秀丽的小城哥尼斯堡，普雷盖尔河横贯其境，并在这儿形成两条支流，把整座城市分割成 4 个区域（见图 12-1），在河的两岸、河中的岛和两条支流之间的半岛之间，人们建造了 7 座各具特色的桥，有趣的桥群和哥城 4 区的迷人景色吸引了众多的游客.

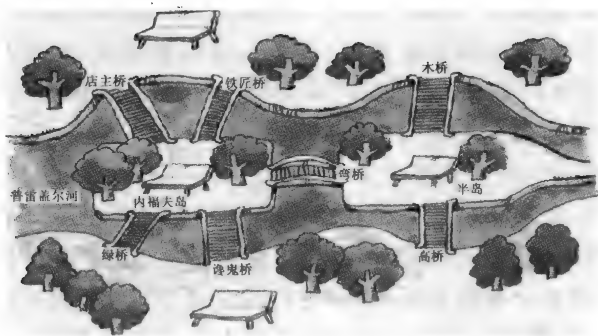


图 12-1

一天又一天，7 座桥上走过了无数的行人，不知从什么时候起，脚下的桥梁触发了人们的灵感，一个有趣的问题在居民中传开了：谁能从一座桥出发一次走遍所有的 7 座桥，而且每座桥都只通过一次回到原地？

这就是著名的"哥尼斯堡七桥问题"：能否从任一陆地出发通过每座桥恰好一次而回到出发点？

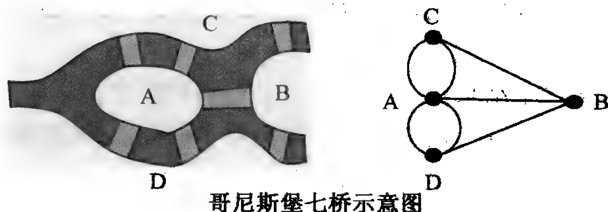
这个问题似乎不难，谁都乐意用它来测试一下自己的智力，可是，谁也没有找到一条这样的路线."七桥问题"难住了哥尼斯堡的所有居民.哥尼斯堡城也因"七桥问题"而出了名.

最后人们便写信给大数学家欧拉，请他帮助.欧拉想了几天，彻底解决了这个问题，他是如何解决的呢？

欧拉并没有跑到哥尼斯堡去走走.他把这个问题化成了这样的问题来看:把两岸、河心心岛、半岛缩成 4 个点,七桥化为 7 条边,两个顶点有边联结,当且仅当这点代表的地区有桥联结起来.这样欧拉就得到了一个图(见图 12-2).

欧拉将问题转化为:在这个图中,从任何一点出发,笔不离纸,但又不能重复任何一条边地画出上图,且起点与终点重合,这样的画法存在吗?

这就是众所周知的"一笔画"游戏.



哥尼斯堡七桥示意图

图 12-2

欧拉研究一般能一笔画成的图应该具有什么性质?他发现它们大体上有两类,全都是偶点或仅有两个奇点.

对这个事实,欧拉的证明非常精巧:

对于偶顶点,无论汇聚于该点的路径有多少条,这些路径不必重复走就恰好可以"用完".例如,对于只连接两条路径的偶顶点,一条进,另一条出,不必重复走就可以"用完"这两条路径.再看另一个例子,对于连接四条路径的偶顶点:第一条进,第二条出,第三条又为进,第四条则为出.同样所有路径可以被"用完".一般的偶顶点的情况同理可证.

反过来,对于奇顶点,总存在一条路径无法"用完".例如连接三条路径的奇顶点,一条路径用作进,另一条用作出.但第三条只能用作回到该顶点.要离开该顶点,我们只能重走三条路径中的某一条.

所以说，能不重复任何路径而遍历的网络，最多只能包含两个奇顶点，而且它们必须是起点和终点. 为什么呢？我们分别记这两个奇顶点为 A 和 B. 因为是奇顶点，A 必定有一条路径没有“用完”. 类似地，B 也必定有一条路径没有“用完”. 不过，要是把其中一条用作出发的路径，另一条用作回到终点的路径，那么实际上这两条路径就被“用完”了.

但是，若网络中还存在第三个奇顶点，那么必定要重走一条以上的路径才能遍历网络.

对应七桥问题的图，所有的顶点都是奇点，共有四个，故这个图肯定不能一笔画成.

欧拉把这个结果在 1736 年的《圣彼得堡科学院学报》上发表，“哥尼斯堡七桥问题”最终导致了两门数学的独立分支图论和拓扑学的创立. 欧拉的哥尼斯堡七桥问题被推选为有史以来十大谜题之一.

三、欧拉公式

在数学历史上有很多公式都是欧拉发现的，它们都叫做欧拉公式，它们分散在各个数学分支之中. 我们仅介绍凸多面体欧拉公式与复数欧拉公式.

1. 拓扑学的最早公式——凸多面体欧拉公式

1750 年欧拉独立地发现：不论什么形状的凸多面体，其顶点数 V、棱数 E、面数 F 之间总有 $V-E+F=2$ 这个关系，并于 1751 年发表.

在数学史上，对正多面体的研究可追溯到古希腊，当时人们意识到，从寻求多面体的顶点数、面数和棱数的关系这一角度入手，可能获得另一条研究正多面体的渠道. 古希腊时期，毕达哥拉斯学派称正多面体为“宇宙形”，据说他们已经清楚所有五种正多面体的作图，柏拉图在他的哲学中把它放到重要的位置，因此它又有

“柏拉图体”之名.

关于正多面体不能多于五种的证明,早已见于《几何原本》,据说最先可能是由古希腊数学家西厄蒂特斯(Theaetetus,公元前 415～前 369)给出的,他的证明基于这样的事实:“任意多面角的各个面角之和都小于四个直角.”而后据正多面体的展开图,制作出五种正多面体模型,就证明了正多面体有且只有五种(见图 12-3).

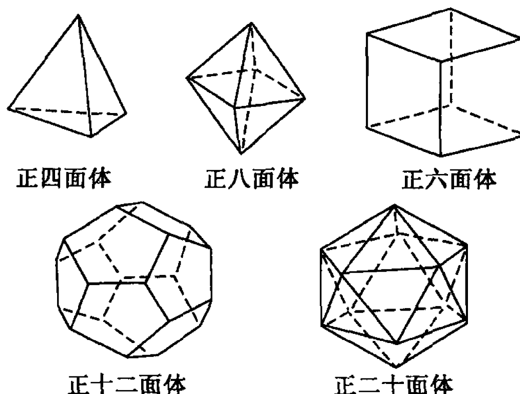


图 12-3

据说大约在 1635 年笛卡儿就早已发现了它,但由于笛卡儿的研究到 1860 年才被人们发现,所以这个定理就称为欧拉公式而不是笛卡儿公式.

1751 年,欧拉对公式 $V-E+F=2$ 给出了一个证明,他对这一关系感兴趣是要用它来做多面体的拓扑分类.

欧拉将 $f(p)=V-E+F$ 称为欧拉示性数,欧拉公式告诉我们,简单多面体的欧拉示性数 $f(p)=V-E+F=2$. 除简单多面体外,还有不是简单多面体的多面体. 例如,将长方体挖去一个洞,连结底面相应顶点得到的多面体. 它的表面不能经过连续变形变为一个球面,而能变为一个环面,它的欧拉示性数为 $f(p)=16+16-$

$-32=0$,所以带一个洞的多面体的欧拉示性数等于零.

欧拉在解决欧拉公式之前还研究并解决了哥尼斯堡七桥问题,这两个问题在18世纪还只是一些孤立的事实,然而欧拉的确强调过它们显然属于几何学的某一分支,其中对象间的关系只与其相对位置有关,而与其数量大小毫无关系,但是只有等到19世纪末20世纪初,这些问题以及其他的一些事实才得到系统化的研究并最终发展成为数学的一个重要的分支——拓扑学.

后来对凸多面体欧拉公式进行证明的是法国数学家勒让德(1794年)和柯西(1811年).

2. 最优美的公式——复数欧拉公式

我们知道,在实数范围内,解方程是无能为力的,只有把实数集扩充到复数集才能解决.对于复数 $a+ib$(a、b 都是实数)来说,当 $b=0$ 时,就是实数;当 $b\neq0$ 时,叫虚数,当 $a=0$,$b\neq0$ 时,叫做纯虚数.可是,历史上引进虚数,把实数集扩充到复数集可不是件容易的事.

16世纪意大利米兰学者卡当在1545年发表的《重要的艺术》一书中,公布了三次方程的一般解法,被后人称为"卡当公式",他是第一个把负数的平方根写到公式中的数学家.

给出"虚数"这一名称的是法国数学家笛卡儿,他在1637年发表的《几何学》中使"虚的数"与"实的数"相对应,从此,虚数才流传开来.

数系中发现一颗新星——虚数,于是引起了数学界的一片困惑,很多大数学家都不承认虚数.以至于在很长时间里,人们把虚数看作不可接受的,谁也说不出它们有什么用处.然而,真理性的东西一定可以经得住时间和空间的考验,最终占有自己的一席之地.

1730年,法国数学家棣莫佛发现了公式 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$,后来被人们称作棣莫佛定理.1748年欧拉在《无穷

分析引论》中阐述了三角函数的解析理论，研究了指数函数和对数函数，并且给出了棣莫佛公式的一个推导，即著名的表达式（复数欧拉公式）：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

复数欧拉公式的重要意义一是在于在此之前，指数函数和三角函数在实数域中几乎没有什么联系，而欧拉在复数域中却发现它们可以相互转化，并被一个非常简单的关系式联系在一起，因此数学家们评价它是“上帝创造的公式”、“人类公认的优美公式”.

复数欧拉公式的重要意义二是在于将三角函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数和指数函数的关系，它在复变函数论里占有非常重要的地位.

1777 年欧拉在《微分公式》中第一次用 i 来表示 -1 的平方根，首创了用符号 i 作为虚数的单位.

将 $x=\pi$ 代入到复数欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 中得到 $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$，即 $e^{i\pi}+1=0$，这个恒等式也叫做欧拉公式，它是数学里最令人着迷的一个公式，它将数学里最重要的 5 个数字联系在了一起：两个超越数：自然对数的底 e（来源于微积分），圆周率 π（来源于几何）；两个单位：虚数单位 i（来源于代数）和实数单位 1（来源于算术），以及数学里常见的 0. 我们可以称该公式将“五朵金花”妙不可言地同时绽开，让两个最著名的超越数结伴而行，使实数和虚数熔于一炉.

将 $x=2\pi$ 代入到复数欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 中得到 $e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$，即 $e^{2i\pi}-1=0$，这个恒等式也叫做欧拉公式，它也是数学里最令人着迷的一个公式，它将数学里最重要的 6 个数字 0，1，2，i，e，π 联系在一起. 我们可以称该公式为“六大明星”同台献艺.

四、欧拉在级数求和方面的独特贡献

要从欧拉庞大的数学体系中找出一两个有代表性的定理是很

困难的.

我们选取欧拉计算级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ 的值进行介绍,主要出于下面三个原因:

第一,从历史上看,这一问题提出了一个十分重要且引起争论的命题;

第二,对这个问题的解决是欧拉的早期成就之一,在很大程度上巩固了他数学天才的名望;

第三,对这个问题的解决不仅证明了欧拉解决前人难题的才干,而且还证明他有能力将一个个别解法转变为一连串同样深刻和出人意料的解法.

1689 年伯努利兄弟在《论无穷级数》一书中,证明调和级数发散之后,又进一步阐述了 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$(整数平方的倒数和)问题.

虽然伯努利兄弟知道这一无穷级数是收敛级数且和小于 2,但他们未能找到其和的精确数值,这一级数的计算不仅难倒了伯努利兄弟,而且也难倒了莱布尼兹,更不要说世界上的其他数学家了.

欧拉是约翰·伯努利的学生,他从老师约翰那里听说了这道难题,他曾谈到开始研究这个级数的时候,只是简单地把级数的项越来越多地加起来,希望能够找到级数的和.他这样一直计算到 20 位(在计算机时代之前,这种计算绝非易事),发现级数的和趋向于数字 1.6449.但遗憾的是,这个数字看起来似乎很陌生.欧拉没有被吓倒,他继续研究,终于在 1734 年发现了解开这个谜的钥匙.他兴奋地写道,"……完全意想不到,我发现了基于 π 的……一个绝妙的公式."

欧拉计算这个级数需要两个工具或采用了两条线索.

其一是初等三角学中的正弦函数.正弦函数的图像是具有无

限振荡性质的正弦波，这一函数是欧拉思想的核心.

从正弦函数的图像上我们可以看到，正弦曲线与 x 轴相交处的点 x，其函数值等于零(见图 12-4).

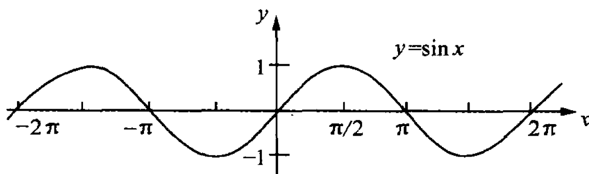


图 12-4

因而，当 $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\pm4\pi$，等等时，$\sin x=0$. 这种使 $\sin x$ 等于零的无穷多的 x 值反映了正弦函数周期性重复变化的特性.

关于正弦的许多知识，我们都可以从初等三角中学到. 但是，如果我们在其中引入微积分中的泰勒级数展开式，我们就会得出下列公式：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots$$

这一公式的重要性在于它为欧拉提供了一种将 $\sin x$ 表达为“无限长多项式”的方式. 这一 $\sin x$ 表达式将永远达不到终点，随着 x 的指数按奇整数序列增大，分母表现为相应的阶乘，而正负号则一正一负交替出现.

另一条线索不是出自三角学或微积分，而是出自代数. 由于正弦函数的泰勒级数展开式是一个无穷多项式，欧拉即转而研究普通的有限多项式，并将它推广到无穷多项式.

设 $P(x)$ 为 n 次多项式，其 n 个根为 $x=a, x=b, x=c, \cdots x=d$；换言之，$P(a)=P(b)=P(c)=\cdots=P(d)=0$. 我们再设 $P(0)=1$. 然后，欧拉知道可以将 $P(x)$ 分解为如下 n 个一次项乘积的形式：

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{d}\right),$$

不妨考虑一下这一一般公式的合理性. 我们可以用直接代入的方法得到:

$$P(a)=\left(1-\frac{a}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{d}\right)=0,$$

$$P(b)=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{b}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{b}{d}\right)=0.$$

$P(x)$的方程式非常清楚地表明, $P(a)=P(b)=P(c)=\cdots=P(d)=0$.

但是, 对 $P(x)$还有另外一个条件: 要求 $P(0)=1$. 因为

$$P(0)=\left(1-\frac{0}{a}\right)\left(1-\frac{0}{b}\right)\left(1-\frac{0}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{0}{d}\right)=1.$$

总之, $P(x)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{d}\right)$具有所寻求的性质.

例如, 假设 $P(x)$是一个三次多项式, 在这里, $P(2)=P(3)=P(6)=0$, 并且 $P(0)=1$. 然后进行因式分解, 得到

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{6}\right)=1-x+\frac{11}{36}x^2-\frac{1}{36}x^3.$$

容易验证这一三次方程符合所要求的条件.

欧拉仔细研究了这一方程后认为, 同样的法则肯定也适用于"无穷多项式". 他像牛顿一样, 也特别相信模式的推广, 既然这一模式对有限多项式是正确的, 为什么就不能适用于无穷多项式呢?

现代数学家都知道, 这种做法是十分危险的, 而且, 将适用于有限多项式的公式推广为适用于无穷多项式的公式, 肯定会遇到巨大的困难. 这种推广当然要比欧拉想象得更微妙, 也需要更多的谨慎. 也许是因为欧拉走运; 也许是因为他那强有力的数学直觉. 无论如何, 他的努力没有落空.

欧拉用他超凡的洞察力作为纽带将全部零散的部件组合在一起，得到了伟大的定理：

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

我们下面给出欧拉对这一伟大定理的证明：

欧拉首先引入函数

$$f(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$$

欧拉认为他有充分理由把 $f(x)$ 看成是无穷多项式，并且 $f(0)=1$. 因此，可以利用上述方法，对这一函数方程作因式分解，以确定方程 $f(x)=0$ 的根. 为此，规定 $x\neq 0$，并得出：

$$f(x)=x\left[\frac{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots}{x}\right]$$

$$=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots}{x}=\frac{\sin x}{x}.$$

根据 $\sin x$ 的泰勒级数展开式，只要 $x\neq 0$，解 $f(x)=0$ 就等于解 $\frac{\sin x}{x}=0$，而后者又可以(通过简单的十字相乘方法)简化为解 $\sin x=0$.

在前面已看到，当正弦函数等于 0 时，$x=0$，$x=\pm\pi$，$x=\pm 2\pi$，等等. 当然，必须从 $f(x)=0$ 的解中排除 $x=0$，因为已规定 $f(0)=1$. 也就是说，$f(x)=0$ 的解只是 $x=\pm\pi$，$x=\pm 2\pi$，$x=\pm 3\pi$，…

基于这些考虑，欧拉将 $f(x)$ 分解因式为：

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-2\pi}\right)$$

$$\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-3\pi}\right)\cdots\cdots$$

$$=\left[\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right]\left[\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\right]$$

$$\left[\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\right]\cdots$$

也就是

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$$
$$=\left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right]\cdots$$

我们称这一方程为核心方程.这是一个非凡的方程,因为它使一个无穷和等于一个无穷乘积.也就是,最初确定$f(x)$的无穷级数等于方程右边的无穷乘积.对于欧拉这样一位非凡的数学家来说,这是非常有启发性的.

欧拉所做的是设想"乘出"上述方程右边的无穷乘积,然后合并 x 的同类项.这样,第一项就将是所有 1 的乘积,当然,等于 1.为得到 x^2 项,我们就必须依次用剩余因子中的 x^2 项去乘所有的 1,而不是与其它因子相乘.这样,欧拉的"无穷乘法"问题就得到了下列方程:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$$
$$=\left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right]\cdots$$
$$=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right)x^2+(\cdots)x^4-\cdots$$

终于,迷雾开始散去.欧拉只要计算出无穷乘积,并得出两个相等的无穷和,那么,同指数的 x 项也就当然相等.请注意,两个级数的第一项都是 1.因而,两个级数中的 x^2 项,其系数也一定相等.即,

$$-\frac{1}{3!}=-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}-\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right).$$

然后,在方程两边同乘以-1,左边即得到 $3!=6$,而右边则

提取公因数$\frac{1}{\pi^2}$，于是欧拉得出

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right).$$

最后，引用十字相乘法，得到

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

这样，欧拉就发现了其他数学家几十年未能发现的答案，完全肯定地说，$\frac{\pi^2}{6}$的数值就等于 1.6449…这一近似值恰好就是欧拉最初所推算的数值. 我们还注意到，这一无穷和也恰如雅各布·伯努利于 1689 年所正确推断的那样，的确小于 2.

然而，在欧拉之前，人们对于这一级数的和恰好等于 π^2 的六分之一，完全一无所知. 这是一个多么古怪的答案. 由于数学本身的种种神秘原因，这一级数的和竟然产生了一个关于 π 的公式. 因为 π 当然是与圆密切相关的，而 1，4，9，16 这些数字则与正方形密不可分，所以，很难想象这二者会联系在一起. 甚至欧拉自己也对他的答案感到吃惊. 他的公式过去是，至今依然是所有数学问题中最独特和最令人吃惊的公式之一. 这一以绝妙的方法推导出来的求和公式，成为数学中第一流的经典定理，被认为是数学发展史上利用有限与无限的类比解决问题的典范.

这一定理帮助奠定了欧拉在整个数学界的崇高声望. 这是一个无可争议的成功，但欧拉并不因这样的巨大成就而心满意足，他的特点就是努力探索一切值得探索的问题.

欧拉注意到，他在核心方程中所计算出的无穷乘积在 $x\neq0$ 的情况下等于$\frac{\sin x}{x}$，我们从正弦函数的图像中可以看到，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 得到最大值 1.

我们将 $x=\frac{\pi}{2}$代入无穷乘积得：

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\left[1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{16\pi^2}\right]\cdots$$

整理后，得

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)\cdots$$

或简化为

$$\frac{2}{\pi}=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{16}\right)\left(\frac{35}{36}\right)\left(\frac{63}{64}\right)\cdots$$

通过取倒数并将方程右边因式分解，欧拉偶然发现了以下公式：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\cdots}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\cdots}$$

这一方程式使$\frac{\pi}{2}$等于一个商，其分子是偶数的乘积，而分母则是奇数的乘积. 实际上，这一方程式早已为英国数学家约翰·沃利斯(1616～1703年)所知，他早在1650年就已用完全不同的方法推导出了这一公式. 而欧拉却在对无穷和与无穷乘积的新奇而相当有力的使用过程中再次发现了它.

但是，欧拉心中还有更多的打算. 他认为，他所发现的计算级数$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$的方法是打开计算"病态"更明显的级数之谜的钥匙.

例如，假设要求偶数平方的倒数和

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$$

欧拉通过提取公因数$\frac{1}{4}$，得出

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{100}+\cdots$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)=\frac{\pi^2}{24}.$$

从而，欧拉利用上面"整数平方的倒数和公式"毫不费力地计算出所有奇数平方的倒数和：

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}.$$

欧拉对他的发现感到振奋，他再接再厉，提出了求整数四次方的倒数和问题：

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots$$

欧拉为解决这个问题，感到应该回到核心方程上来，但这一次是要确定方程两边 x^4 项的系数. 但是，怎样才能从核心方程右边的无穷乘积中找到 x^4 项呢？这并非一个平凡的小问题. 在求解这一问题的过程中，欧拉再次得益于他对模式认辨敏锐的感觉和他关于任何有限乘积都可以推广到无限乘积的信念.

为了理解欧拉的推理过程，我们先举两个十分简单但却富有启发性的例子，说明他推导 x^4 项系数的方法.

第一个例子是：

$$(1-ax^2)(1-bx^2)=1-(a+b)x^2+abx^4$$
$$=1-(a+b)x^2+\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]x^4,$$

第二个例子是：

$$(1-ax^2)(1-bx^2)(1-cx^2)$$
$$=1-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x^4-(abc)x^6$$
$$=1-(a+b+c)x^2+\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]x^4-(abc)x^6$$

这些方程可以简单地通过乘出右边方括号中的各项来直接验算.

仔细观察,模式已经出现,即,将$(1-ax^2)$,$(1-bx^2)$,$(1-cx^2)$等一系列因式相乘后,x^4的系数就等于$(a+b+c+\cdots)$之和的平方与平方和$(a^2+b^2+c^2+\cdots)$二者的差的一半. 如果这一模式对于两个或三个这种因式的乘积是正确的话,那么,为什么不能推广到四个、五个,甚至无穷多个因式的乘积呢? 欧拉回到核心方程,推导出:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$$
$$=\left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right]\cdots$$

我们看到,在这里$\frac{1}{\pi^2}$相当于a,$\frac{1}{4\pi^2}$相当于b,$\frac{1}{9\pi^2}$相当于c,…因而,应用我们对x^4系数的这一认识,就得到:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)^2-\left(\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{16\pi^4}+\frac{1}{81\pi^4}+\cdots\right)\right]x^4-\cdots$$

欧拉同时考虑这一方程两边x^4的系数,左边系数为$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$,右边的相应系数比较复杂,但可以用代数方法进行整理,先提取π的同指数公因数,然后利用上面"整数平方的倒数和公式". 所以,方程右边的x^4项的系数是

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdots\right)^2-\left(\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{16\pi^4}+\frac{1}{81\pi^4}+\frac{1}{256\pi^4}\cdots\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)^2-\frac{1}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi^4}\left[\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{72}-\frac{1}{2\pi^4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots\right).$$

欧拉将以上两个 x^4 的系数列为等式，并解出所得方程如下：

$$\frac{1}{120}=\frac{1}{72}-\frac{1}{2\pi^4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots\right).$$

所以：

$$\frac{1}{2\pi^4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots\right)=\frac{1}{72}-\frac{1}{120}=\frac{1}{180}.$$

最后，通过十字相乘，就得出了欧拉的公式：

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{k^4}+\cdots=\frac{2\pi^4}{180}=\frac{\pi^4}{90}.$$

欧拉发现了一个真正奇特的结果，他将完全四次方的倒数与 π 的四次方联系在了一起. 然后，他像一个孩子发现了新玩具一样，兴高采烈地应用他非凡的方法，去求更奇特级数的和，如：

$$1+\frac{1}{64}+\frac{1}{729}+\frac{1}{4096}+\cdots+\frac{1}{k^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

他不断对偶次幂级数进行推算，并得出了：

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\cdots+\frac{1}{k^{26}}+\cdots=\frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}.$$

欧拉踏上了历史上没有一个人曾踏上的这一数学之旅，它们确实是人类知识的一大进步，是对有关整数乘方倒数与最重要常数 π 之间关系的发现，而这些关系，以前人们从未想到过.

至此，人们会立即想到一个问题：整数奇次幂的倒数和又将如何呢？例如，我们能否计算出无穷级数

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots$$

对此，甚至欧拉也缄默不语，的确，过去 200 年的数学研究对这些奇次幂级数的认识进展甚少.

但是,我们可以很容易地推测,整数奇次幂的倒数和一定对应于分数$\frac{p}{q}$的$\left(\frac{p}{q}\right)\pi^3$形式,但时至今日,仍没有人能够肯定这一推测是否正确.

现在,我们认识到,欧拉关于无穷级数的推理并不十分严格.他相信有限级数所产生的模式和公式可以自动推广到无穷级数,这与其说是科学,不如说是一种信念.虽然,欧拉未能为他的推理提供充分的逻辑依据,或者说他推论无穷级数的方法还十分幼稚,但他所有这些奇妙的级数和都已得到了今天高标准的严密逻辑证明.

需要说明的是,欧拉关于级数求和的这些成就在欧拉的70余卷著作中只占了几页.

第十三章　微积分中的特殊积分

积分计算是微积分的重要内容，人们对如何计算积分的研究经历了曲折的智力考验，提出了诸如换元积分法、分部积分法等积分计算技巧，其主要思想是求出被积函数的原函数. 同时在计算积分的过程中，人们也发现有些积分虽然存在，但其原函数却无法用初等函数来表示，如：被积函数为 e^{x^2}，$\frac{\sin x}{x}$，$\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$，$\frac{1}{\ln x}$，$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$等函数.

本部分主要介绍几类原函数为非初等函数的积分计算问题，主要包括：狄利克雷积分、概率积分、欧拉积分、椭圆积分、可利用其他技巧计算的特殊积分.

一、狄利克雷积分

狄利克雷积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在自然科学中有着广泛的应用，这个积分是收敛的，但并不绝对收敛. 这里，我们给出这个积分的几种计算方法.

解法一：考虑含参变量 a 的积分 $I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，容易证明，它在 $0\leqslant a<+\infty$ 上连续. 且当 $a>0$ 时满足积分号下求导的

条件，故有 $F(a)=\int_0^{+\infty}-e^{-ax}\sin x dx=-\frac{1}{1+a^2}$. 由此得到

$$I(a)=-\arctan a+C.$$

因 $a>0$ 时，

$$0\leqslant|I(a)|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-ax}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a},$$

故 $\lim\limits_{0\to\infty}I(a)=0=-\frac{\pi}{2}+C$，从而 $C=\frac{\pi}{2}$，又因 $I(a)$ 在 $a=0$ 连续，故

$$\lim_{x\to+\infty}I(a)=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\arctan a+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

即 $I=\frac{\pi}{2}$.

解法二：考虑广义二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-xy}\sin x dx dy$，

其中 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. 今按两种不同的次序进行积分，得

$$I=\int_0^{+\infty}\sin x dx\int_0^{+\infty}e^{-xy}dy=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx. \tag{1}$$

另一方面

$$I=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x dx=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

比较(1)、(2)两式得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

二、概率积分

概率积分是高斯函数 e^{-x^2} 的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$，也称为高斯积分，在概率论和连续傅里叶变换的统一化等计算中有广泛的应用. 法国裔英国籍数学家亚伯拉罕·棣美弗在 1730 年出版的专著《分

析杂论》中最早使用概率积分. 下面我们给出计算该积分的集中方法.

方法一:用二重积分

现有连续函数 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ 在正方形区域 D:$(-a\leqslant x\leqslant a;-a\leqslant y\leqslant a)$;圆域 R_1:$(x^2+y^2\leqslant a^2)$;圆域:R_2:$(x^2+y^2\leqslant 2a^2)$上的二重积分分别为 I,I_1,I_2,即:

$$I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y=(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\mathrm{d}x)^2,$$

$$I_1=\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\cdot e^{-r^2}\mathrm{d}r=\pi(1-e^{-a^2}),$$

$$I_2=\iint\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a} r\cdot e^{-r^2}\mathrm{d}r=\pi(1-e^{-2a^2}),$$

(用极坐标)

同时又因为:$I_1\leqslant I\leqslant I_2$,故有 $\lim\limits_{a\to+\infty}I_1\leqslant\lim\limits_{a\to+\infty}I\leqslant\lim\limits_{a\to+\infty}I_2$,即有

$\lim\limits_{a\to+\infty}(\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\mathrm{d}t)^2=\pi$,从而 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

方法二:用三重积分

首先我们把旋转体的体积概念推广到积分限无穷的情况.

再设 xOz 平面上的曲线 $Z=e^{-x^2}$ 绕 Z 轴旋转一周得到的曲面 $Z=e^{-(x^2+y^2)}$ 与平面 xOy 围成的体 V. 显然,一方面,该体的体积

$$V=\iiint\limits_V x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{e^{-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}z=(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x)^2,$$

另一方面,根据旋转体的体积公式有:

$$V=\int_0^1 s(X)\mathrm{d}z=-\pi\int_0^1\ln z\mathrm{d}z=\pi(z-z\ln z)\big|_0^1=\pi$$

故有 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

三、欧拉积分

欧拉积分是指下面两个特殊的含参量广义积分：

1. Euler 第二型积分，称为 Gamma 函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \ ,(s>0)$$

Γ 函数的性质：

Euler 第二型积分定义了 $s\in(0,+\infty)$ 内的一个函数 $\Gamma(s)$，$\Gamma(s)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内连续、下凸，有唯一极小点，位于区间 $(1,2)$ 内，$\lim\limits_{s\to 0}\Gamma(s)=\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty$，$\Gamma(s)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内非一致收敛，但在区间 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛；$\Gamma(s)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意阶可导，且 $\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n\mathrm{d}x$.

Γ 函数图像如图 13-1 所示：

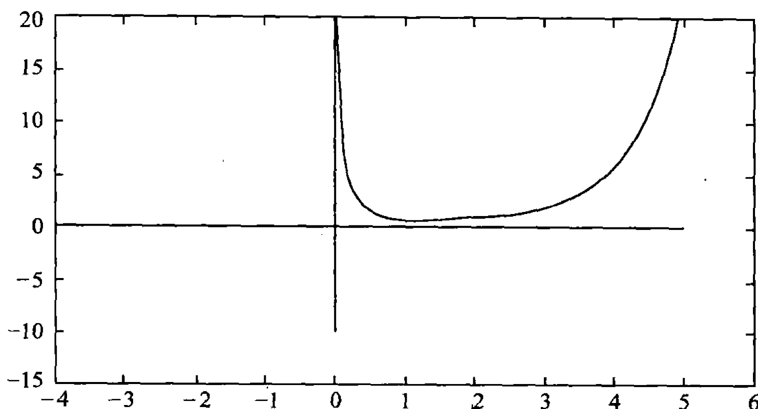


图 13-1

Γ 函数的递推公式为：

$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，$(s>0)$；特别地 $\Gamma(n+1)=n!$；

Γ 函数表：

很多繁杂的积分计算问题可化为 Γ 函数来处理，人们仿三角函数表、对数表等函数表，制定了 Γ 函数表供查；由 Γ 函数的递推公式可见，有了 Γ 函数在 $0<s<1$ 内的值，即可对 $\forall s>0$，求得 $\Gamma(s)$的值，通常把 $1.00\leqslant s\leqslant 2.00$ 内 Γ 函数的某些近似值制成表，称这样的表为 Γ 函数表.

Γ 函数的延拓：

当 $s>0$ 时，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，$\Rightarrow \Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$. 该式右端在 $-1<s<0$ 时也有意义. 用其作为 $-1<s<0$ 时 $\Gamma(s)$的定义，即把 $\Gamma(s)$延拓到了$(-1,0)\cup(0,+\infty)$内. 当$-2<s<-1$时，依式$\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$，利用延拓后的 $\Gamma(s)$，又可把$\Gamma(s)$延拓到$(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$内. 依此，可把 $\Gamma(s)$延拓到$(-\infty,+\infty)$内除去 $x=-n(n=0,1,2,\cdots)$的所有点.

Γ 函数的其他形式：

某些积分可通过换元或分部积分若干次后化为 Γ 函数，可查 Γ一函数表求得该积分的值；常见变形有：

①令 $x=pt(p>0)$，有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=p^s\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-pt}dt,$$

因此，$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-px}dx=p^{-s}\Gamma(s)$，$(p>0,s>0)$.

②令 $x=t^2$，$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}e^{-t^2}dt$，注意到结果 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，得 $\Gamma(s)$的一个特殊值

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\approx 1.772454.$$

③令 $x=-\lambda\ln t(\lambda>0)$，得 $\Gamma(s)=\lambda^s\int_0^1\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)^{s-1}t^{\lambda-1}dt$，取

$\lambda=1$，得

$$\Gamma(s)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{s-1}\mathrm{d}t=\int_0^1(-\ln t)^{s-1}\mathrm{d}t.$$

2. Euler 第一型积分，称为 Beta 函数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\,(p>0,q>0).$$

B 函数的性质：当 $p>0,q>0$ 时积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛，积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 定义了 $D=\{(p,q)\mid 0<p<+\infty,0<q<+\infty\}$ 内的一个二元函数；B 函数在 D 内闭一致收敛；B 函数是 D 内的二元连续函数；B 函数具有对称性：$B(p,q)=B(q,p)$.

B 函数的递推公式：$B(p+1,q+1)=\dfrac{q}{p+q+1}B(p+1,q)$

B 函数的其他形式：

①令 $y=x^\alpha$，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\gamma(1-x^\alpha)^\beta\mathrm{d}x&=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 y^{\frac{\gamma}{\alpha}}(1-y)^\beta y^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 y^{\frac{1+\gamma}{\alpha}-1}(1-y)^{\beta+1-1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{1+\gamma}{\alpha},\beta+1\right),\end{aligned}$$

因此得 $\int_0^1 x^\gamma(1-x^\alpha)^\beta\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{1+\gamma}{\alpha},\beta+1\right),\frac{1+\gamma}{\alpha}>0,\beta>-1.$

②令 $y=\cos x$，可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\cos^\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)$，$\alpha>-1,\beta>-1$.

特别地，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

③令 $x=\frac{t}{1+t}$，有 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t,$$

即 $\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t=B(p,q),(p>0,q>0)$.

④令 $t=\frac{x}{b-a}-\frac{a}{b-a}$，可得

$$\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}\mathrm{d}x=(b-a)^{m+n-1}B(m,n),m>0,n>0.$$

⑤ $\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^n(1+a)^n}B(m,n),a\neq 0,-1;$ $m>0,n>0$.

3. 两类欧拉积分的关系

Γ 函数和 B 函数之间有关系式：$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},(p>0,q>0)$，特别地，$p>0,q>0$ 且 $p+q=1$ 或 $p+q=2$ 时，由于 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$，就有 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)$.

Γ 函数和三角函数的关系(余元公式)：对 $0<p<1$，有 $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$. 利用余元公式，只要编制出 $0<s\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $\Gamma(s)$ 的函数表，再利用三角函数表，即可对 $\forall s>0$，查表求得 $\Gamma(s)$ 的近似值.

四、椭圆积分

在 17 世纪，由于天文学的需要，人们企图求出椭圆的弧长，这就导致了一类新的积分——椭圆积分.

1786 年勒让德(Legendre)着手研究椭圆积分这个课题，他在《椭圆函数研究》中证明了一般椭圆积分：

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\mathrm{d}x,$$

其中 $P(x)$是 x 的任一有理函数，而 $R(x)$是通常一般的四次多项式)，能化为三种类型：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}},$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}.$$

勒让得把上面三类积分称为第一、二、三型椭圆积分.

他还证明了：经过进一步的变换这三个积分可化为以下三种形式：

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad 0<k<1,$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,\qquad 0<k<1,$$

$$\pi(n,k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad 0<k<1,$$

勒让得引入记号 $\Delta(k,\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$

这些形式也可通过变数替换 $x=\sin\varphi$ 转化为雅可比形式：

$$F(k,x)=\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$E(k,x)=\int_0^{x}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\pi(n,k,x)=\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}x}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

量 k 叫做上面各椭圆积分的模. 如果积分限是 $\varphi=\pi/2$ 或 $x=1$，则

称此积分是完全的,否则称为不完全的.

阿贝尔最早正式发表的椭圆函数论论文是刊于《数学杂志》的《关于椭圆函数的研究》(1827),把椭圆积分理论归结为椭圆函数的研究.

创立、发展椭圆函数论是雅可比最卓著的数学贡献,他 1829 年发表的《椭圆函数论新基础》成为该领域的经典著作.

五、可利用其他技巧计算的特殊积分

例 13-1　计算积分:

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

解:作变量替换 $x=\tan t$,则

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

对第二个积分,作变量替换 $t=\frac{\pi}{4}-u$ 得:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t &= -\int_{\frac{\pi}{8}}^{0} \ln\frac{2}{1+\tan u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t+\frac{\pi}{8}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例 13-2 计算积分：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\lambda}}$.

解：令 $x=\frac{\pi}{2}-u$，

则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\lambda}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\mathrm{d}(-u)}{1+\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^{\lambda}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+(\mathrm{cot}u)^{\lambda}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\lambda}u}{1+\tan^{\lambda}u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\lambda}u}{1+\tan^{\lambda}u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\lambda}x}{1+\tan^{\lambda}x}\mathrm{d}x,$$

所以 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}+\frac{\tan^{\lambda}x}{1+\tan^{\lambda}x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. 即 $I=\frac{\pi}{4}$.

例 13-3 计算积分：$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解：$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$（令 $x=\pi-t$）

$$=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-I,$$

故 $2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}=\mathrm{d}t=-\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)=\frac{\pi^2}{2}$，

所以 $I=\frac{\pi^2}{4}$.

例 13-4 计算积分：$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{\pi/2}^{0}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

相加可得 $2I=\frac{\pi}{2}$，故 $I=\frac{\pi}{4}$.

例 13-5　计算积分：$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解：因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

对第二个积分，作变量替换 $x=\frac{1}{t}$ 得：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$$

例 13-6　计算积分：$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x,$$

故 $2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x-\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x,$$

即 $2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2$,

令 $u=2x$，$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

又$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u$,(对后者令 $t=\pi-u$)$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\mathrm{d}u,$$

所以 $2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2=A-\frac{\pi}{2}\ln 2$,即

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例 13-7 计算积分:$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,\quad 0<a<b.$

解:$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_a^b x^u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_0^1 x^u\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$

$$=\int_a^b\left(\frac{x^{u+1}}{u+1}\right)\Big|_0^1\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

参考文献

1. 李文林. 数学珍宝——历史文献精选. 北京：科学出版社，1998

2. 孙兴运. 数学符号史话. 济南：山东教育出版社，1998

3. 张奠宙. 数学史选讲. 上海：上海科学技术出版社，1997

4. 杜瑞芝. 简明数学史辞典. 济南：山东教育出版社，1991

5. 华东师范大学数学系. 数学分析（上、下）. 北京：高等教育出版社，1991

6. 张远南. 函数和极限的故事. 北京：中国少年儿童出版社，2005

7. 陈仁政. 不可思议的 e. 北京：科学出版社，2005

8. 陈仁政. 说不尽的 π. 北京：科学出版社，2005

9. 易南轩. 数学美拾趣. 北京：科学出版社，2008

10. 王树禾. 数学演义. 北京：科学出版社，2004

11. 张景中. 数学与哲学. 北京：中国少年儿童出版社，2003

12. 欧阳维诚等. 初等数学思想方法选讲. 长沙：湖南教育出版社，2000

13. 克莱因. 古今数学思想. 上海：上海科学技术出版社，1979

14. 李心灿. 微积分的创立者及其先驱. 北京：高等教育出版社，2007

15. 李学数. 数学和数学家的故事. 北京：新华出版社，1999

16. 吴文俊. 世界著名数学家传记(上、下集). 北京:科学出版社,2003

17. [美]帕帕斯著. 张远南等译. 数学趣闻集锦. 上海:上海教育出版社,2001

18. R. 柯朗,H. 罗宾. 数学是什么. 北京:科学出版社,1985

19. 罗声雄. 数学的魅力——初等数学概念演绎. 武汉:武汉出版社,1999

20. 明清河. 数学分析的思想与方法,济南:山东大学出版社,2004

21. 杨艳萍. 数学发现的思想与方法,济南:山东教育出版社,2007

22. 张顺燕. 数学的源与流,北京:高等教育出版社,2003